Wykłady uniwersyteckie.

Teorya Maxwell'a

i

teorya elektronów

według wykładów

Prof. Dr^a Smoluchowskiego.

Lwów 1910.

Nakładem Kółka matemat.-fizycznego.

Do zrozumienia teoryi Maxwella bardzo potrzebna jest bliższa znajomość rachunku wektorowego. Pierwsze zasady są znane; wiemy, co to jest wielkość skalarna, a co wektorowa, wiemy, jak się wektory dodaje i odejmuje, jak się wektory mnoży

$$(ab) = ab \cos (ab)$$

dalej, jak się wektory rozkłada

$$a = ia_1 + ja_2 + ka_3$$

Wobec tego

$$(ab) = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

Tu stosuje się prawo rozdzielności i przemienności, można to więc wymnożyć jak w zwykłej algebrze

$$(ab) = a_1 b_1 i^2 + a_2 b_2 j^2 + a_3 b_3 k^2 +$$
$$+ a_1 b_2 ij + a_2 b_3 jk + a_3 b_1 ki +$$
$$+ a_1 b_3 ik + a_2 b_1 ji + a_3 b_2 kj$$

Te iloczyny skalarne, gdzie mamy dwa różne wektory i j i t. d. znikają, bo kąt między nimi jest $\frac{\pi}{2}$, a $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Pozostają tylko te, gdzie występują kwadraty, a te są równe jedności:

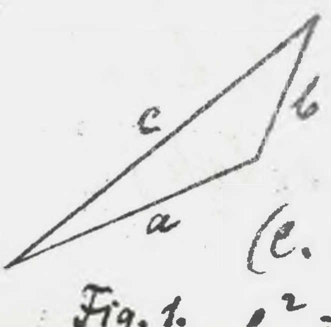
$$(a\,b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Stąd można otrzymać znane wzory z geometryi analitycznej. Jeżeli n.p. a i b są wektorami jednostkowemi, to otrzymujemy stąd wzór na cos kąta między dwoma wektorami

$$\cos(ab) = \cos ax \cos bx + \cos ay \cos by + \cos az \cos bz$$

Podobnie każdy wzór z rachunku wektorowego można interpretować geometrycznie.

Weźmy trójkąt (fig. 1.) o bokach a, b, c, gdzie $c = a + b$. Weźmy kwadrat obu stron:



$$(c \cdot c) = (a+b)(a+b)$$

Fig. 1.

$$c^2 = a^2 + (ba) + (ab) + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(ab)$$

jest to twierdzenie Carnota.

Teraz przejdźmy do iloczynu wektorowego. Definicya jest

$$[ab] = ab\sin(ab)$$ ma to być wielkość wektorowa, prostopadła do (ab)

W formie wyznacznika pisze się to

$$[ab] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Można tu wyprowadzić prosto twierdzenie

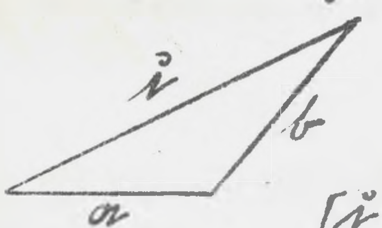


Fig. 2.

$$r = a + b$$

pomnożymy to wektorowo przez a

$$[r\,a] = [\underset{0}{\xcancel{a\,a}}] + [b\,a]$$

[Każdy iloczyn wektorowy, który zawiera równe składniki $= 0$ bo

$$[a\,a] = a\,a\sin 0 = 0$$

wogóle, jeżeli napiszemy $[a\,b] = 0$, znaczy to, że wektory są równoległe]

$$c\,\alpha \sin(i\,\alpha) = b\,\alpha \sin(b\,\alpha)$$

$$c \sin(i\,\alpha) = b \sin(b\,\alpha)$$

$c : b = \sin\gamma : \sin\beta$ Jest to znane twierdzenie sinusowe z trygonometryi. —

W podobny sposób można interpretować następujące twierdzenie:

Weźmiemy kwadrat iloczynu wektorowego $\alpha\, b$ — więc $[\alpha\, b]^2 = a^2 b^2 \sin^2[\alpha\, b]$ a podług definicyi przez wyznacznik

$$[\alpha\, b]^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 + (a_3 b_1 - b_3 a_1)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2$$

Jeżeli teraz powiemy, że początkowe wektory są jednostkowe, to otrzymamy

$$\sin^2[\alpha\, b] = (\cos ay \cos bz - \cos az \cos by)^2 + (\cos az \cos bx - \cos bz \cos ax)^2 + (\cos ax \cos by - \cos bx \cos ay)$$

Teraz przejdźmy do składania 3 wektorów

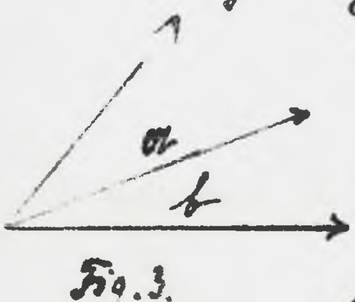


Fig. 3.

Utwórzmy iloczyn wektorowy z $\alpha\, b$ (fig. 3.) bezwzględna wartość jego równa się wielkości pola, utworzonego przez te wektory i prosto-

stanowi wektor ⊥ do tego pola, przyczem kierunek jego tak się dobiera, by wektory $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ razem z nim tworzyły system prawej ręki. Utwórzmy teraz iloczyn skalarny z iloczynu $(\mathfrak{a}\ \mathfrak{b})$ i trzeciego wektora $\mathfrak{c}$ czyli $[\mathfrak{c}(\mathfrak{a}\ \mathfrak{b})]$ oznacza to iloczyn bezwzględnej wartości $\mathfrak{c}$ i $[\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}]$ w cos ∢ między nimi zawartego. Otrzymujemy w ten sposób objętość równoległościanu, wykreślonego na tych 3 wektorach (fig. 4.).

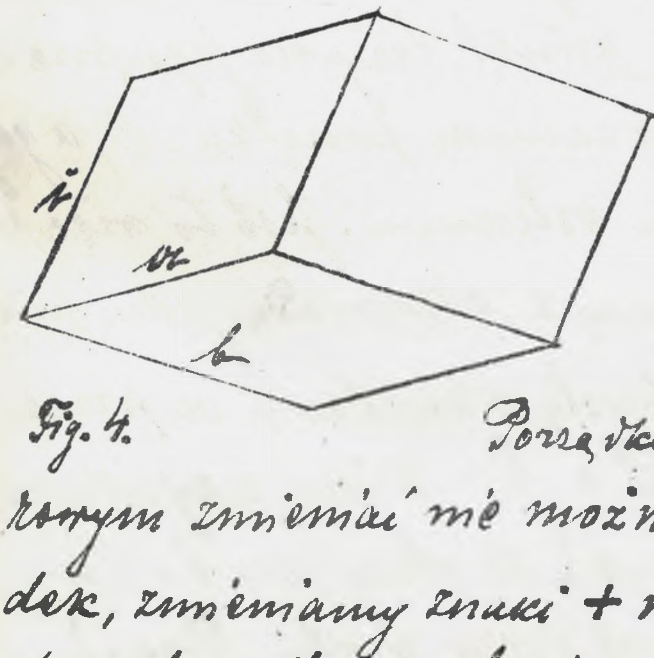


Fig. 4.

Jest to wielkość skalarna, a wielkość jej istotna jest Vol $(\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c})$. Widzimy, że tu można kolejno zmieniać znaki. Porządku jednak w iloczynie wektorowym zmieniać nie można, bo zmieniając porządek, zmieniamy znaki + na −

$(\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}]) = \text{Vol}(\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c})$

$(\mathfrak{c}[\mathfrak{b}\ \mathfrak{a}]) = -\text{Vol}(\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c})$

Ale można pokombinować $[\mathfrak{c}\ \mathfrak{a}]$ z trzecim wektorem, lub $[\mathfrak{c}\ \mathfrak{b}]$ z $\mathfrak{a}$

$$(c[a\,b]) = (a[b\,c]) = (b[c\,a]) =$$
$$= -(c[b\,a]) = -(a[c\,b]) = -(b[a\,c])$$

Teraz przejdźmy do zastosowań geometrycznych. Mamy punkt, z którego wykreślamy 3 wektory i jakiś wektor, oznaczony przez a. To oznaczając wektor $r = x\,a$, wykreślamy wektor, który jest wielokrotnością wektora a.

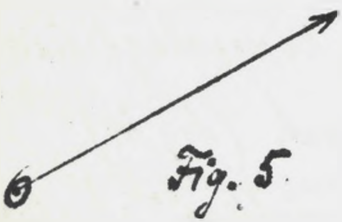


Fig. 5

Gdy $0 < x < 1$ otrzymamy punkt na samym wektorze a, gdy $x > 1$ punkt leży na jego przedłużeniu, gdy $x = 0$, — w samym początku O, a gdy $x < 0$ na przedłużeniu wstecznem. Jest to więc równanie prostej; każdemu x odpowiada jeden punkt.

Chcemy przełożyć prostą o kierunku a przez punkt O odległy od P o b. Widać z rysunku (fig. 6.), że wtedy $r = b + x\,a$

Fig. 6.

To się tyczy prostej. Dowolny punkt na płaszczyźnie otrzymamy, kładąc

$$r = x\,a + y\,b \quad\text{.....}\quad (\alpha)$$

To jest więc równanie płaszczyzny. Podobnie, gdyby płaszczyzna miała być przełożona nie przez punkt O, lecz przez jakiś punkt odległy o c, to

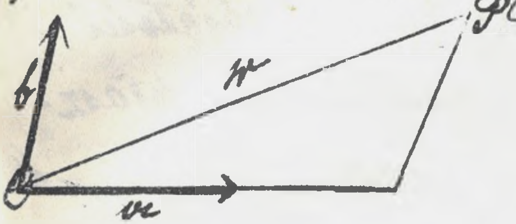


Fig. 7.

równanie jej byłoby

$$w = c + x a + y b \text{......} (\alpha')$$

Mamy 2 parametry zmienne, bo płaszczyzna ma 2 wymiary. Równanie płaszczyzny można jeszcze inaczej wyrazić. Iloczyn skalarny $(a[b\ r])$ przedstawia objętość równoległościanu, utworzonego przez te 3 wektory. Jeżeli taki równoległościan spłaszczymy, to objętość jego = 0, to jest równocześnie znakiem, że te 3 wektory leżą na jednej płaszczyźnie, czyli, że są **komplanarne**. Jeden z tych wektorów można oznaczyć w

β) $(w[a\ b]) = 0$ oznacza, że w leży w płaszczyźnie przełożonej przez a i b. Jest to więc równanie płaszczyzny, przechodzącej przez wektory a i b.

Spróbujmy, czy z równania α wynika β

Mamy tam $w = x a + y b$ teraz

$(r[a\,b]) = x(a[a\,b]) + y(b[a\,b])$

każdy z tych składników $= 0$, bo równoległościan, którego 2 krawędzie są identyczne, staje się równoległobokiem. Nie ma więc żadnej objętości —

Gdyby punkt, przez który przekładamy płaszczyznę, nie był punktem 0, lecz jakimś innym w odstępie c, trzebaby pisać

$$([r-c][a\,b]) = 0,$$ a to jest identyczne z formą α

$$(r[a\,b]) = (c[a\,b]) = m \qquad \gamma)$$

jest to nowa wielkość skalarna.

Równanie płaszczyzny, przełożonej przez wektory a b a nie przechodzącej przez początek współrzędnych, da się wyrazić równaniem γ), gdzie m będzie w związku z odstępem. —

Powróćmy do równania prostej. Można je także wyrazić $[r\,a] = 0$ to bowiem znaczy, że te 2 wektory r i a są równoległe, a jeżeli je wykreślimy z jednego punktu, to muszą spadać na siebie. To jest identyczne z tem, że $r = x\,a$, bo jeżeli to podstawimy, to $[r\,a] = x[a\,a] = 0$

Podobnie prosta ‖ do a, przechodząca przez punkt w odległości b ma równanie $[(r-b)a]=0$.—

Utwórzmy symbol następujący $[r[a\ b]]=0$ znaczy to, że wektor r ma być do wektora $[a\ b]$ równoległy, a że wektor $[a\ b]$ jest prostopadły do a i b, więc $r\perp a$ i $r\perp b$ to jest równanie prostej, prostopadłej do a i b. —

Weźmy takie zadanie:

Mamy wektor i (fig. 8.), który oznacza położenie punktu względem początku układu i przy końcu przeprowadzamy wektor a. Jakie będzie położenie płaszczyzny przełożonej przez te 2 wektory?

Trzeba wyrazić, że trzeci wektor r jest komplanarny z i i a, czyli, że $(r[a'\ i])=0$, bo jest rzeczą obojętną, czy bierzemy a czy a', o ile ich kierunek i wartość skalarna są te same.—

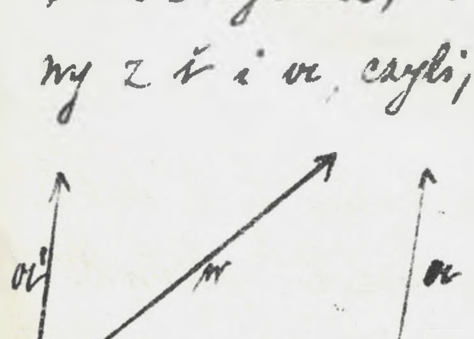


Fig. 8.

2) Mamy 3 wektory (fig. 9.) a b i chcemy skonstruować płaszczyznę, przechodzącą przez ich końce. Na tej płaszczyźnie bierze-

my dowolny punkt bieżący P, którego położenie względem punktu O jest określone przez wektor r.

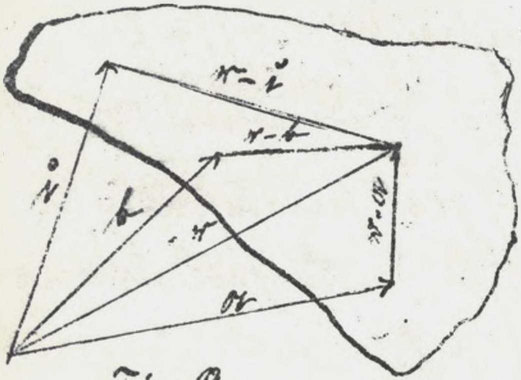


Fig. 9.

Proste, łączące r z końcami wektorów a b i muszą leżeć na jednej płaszczyźnie. Są one przedstawione przez różnice $(r-a)$ $(r-b)$ $(r-i)$. Jeśli mają leżeć na jednej płaszczyźnie, to $((r-a)[(r-b)(r-i)])=0$

Można też wyrazić, że trzeci wektor ma leżeć w płaszczyźnie, przełożonej przez 2 pierwsze.

$((r-a)[(b-a)(i-a)])=0$ Można sprawdzić, że te równania są identyczne.

Weźmy najprostszy przypadek, mianowicie, że to są wektory jednostkowe $((r-i)[(j-i)(k-i)])=0$ to byłaby płaszczyzna przesunięta przez końce tych wektorów. Na tych 3 wektorach można kreślić odcinki li, mj, nk, to będzie przypadek ogólniejszy

$((r-li)[(mj-li)(nk-li)])=0$

$=((r-li)(mn[jk]-ln[ik]-ml[ji]+l^2[ii]$

$\quad\;\; \underset{i}{} \qquad\quad -j \qquad\quad -k$

A wykonując mnożenie skalarne:

$mn_l ri + ln(rj) + ml(rk) - lmn(i^2)$

$- l^2 n(ij) - l^2 m(ik) = 0$

(ri, rj, rk są bezwzględne wartości wektorów, pomnożone przez cos kąta, między nimi zawartego, są to więc rzuty wektorów, na odpowiednie osi).

Wobec tego ostatecznie wypadnie:

$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$ jest to równanie płaszczyzny w formie odcinkowej, – ma ono wielkie znaczenie dla krystalografii, szczególnie przy dalszych grupach – Przejdźmy do krzywych przestrzennych i do powierzchni w przestrzeni.

Aby wyrazić krzywą w płaszczyźnie, musi być dana płaszczyzna przełożona przez wektory a i b. Wektor „r" (fig 10). wykreślony do punktu bieżącego krzywej, leży w tej płaszczyźnie, musi się więc dać ~~od~~ rozłożyć na sumę geometryczną 2 składników. Wektor:

$r = a\varphi(\mu) + b\psi(\mu)$

zmieniając w sposób ciągły μ dostaniemy jakąś krzywą płas-

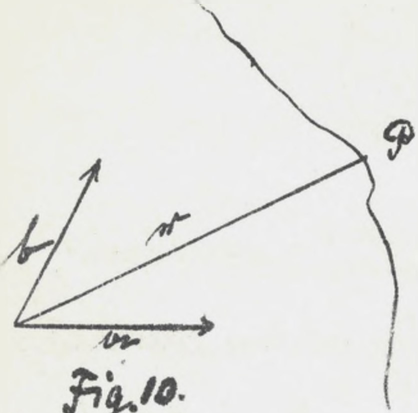


Fig.10.

ską.

Odpowiednio w przestrzeni każdy wektor r można rozłożyć na 3 kierunki nie komplanarne.

$r = a\varphi(u) + b\psi(u) + i\chi(u)$, co przy zmiennym parametrze u przedstawi krzywą przestrzenną.

Weźmy n.p. linię śrubową (fig.11.) na pobocznicy walca. Rozłóżmy wektor r na 3 składowe i, j, k.

$r = a\cos\varphi\, i + a\sin\varphi\, k + b j \varphi.$

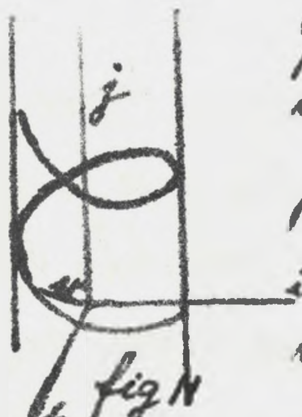


fig 11

φ kąt między promieniem r i płaszczyzną ik jest zmiennym parametrem.

Równanie powierzchni da się wyrazić w analogiczny sposób. Pun[kt] P (fig. 12.) obrany dowolnie na po[wie]rzchni, będzie dany przez wektor r, wykreślony z początku współrzędnych, r da się wyra[zić] przez wielokrotności a, b, i ...

fig.12

kreślonych nie komplanarnie, a współczynniki będą zależały od 2 parametrów.

$r = a\varphi(\mu\, v) + b\psi(\mu\, v) + i\chi(\mu\, v)$

Kładzie $\mu = const.$ a v zmienne, lub naodwrót, otrzymujemy równanie krzywych przestrzennych, leżących na tej powierzchni. —

Normalna do powierzchni w punkcie P, będzie określona jako prostopadła do elementów 2 krzywych $\mu = const$ i $v = const$ w tym punkcie.

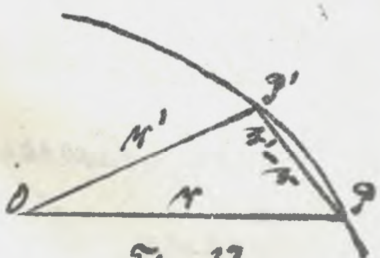


Fig. 13.

Łącznica $P'P = r' - r = dr$ (fig. 13.) więc element krzywej w jednym kierunku będzie przedstawiony przez różniczkę dr_μ (przy zmiennem μ), a w drugim przez dr_v, kierunek prostopadły do nich otrzymamy biorąc iloczyn wektorowy.

$[dr_\mu\, dr_v] = 0$ Wielkość tego wektora jest rzeczą obojętną, bo chodzi nam jedynie o kierunek normalnej, przedstawiony właśnie tym symbolem, który wyrachujemy przez różniczkowanie cząstkowe.

$\frac{\partial w}{\partial u} du = dw_u$ | du i dv można opuścić

$\frac{\partial w}{\partial v} dv = dw_v$ | jako wielkości liczbowe.

$n = \mu \left[\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v}\right]$ n oznacza kierunek normalny.

μ wskazuje na to, że mamy do czynienia tylko z wektorem normalnej.

Niech będzie dana normalna w punkcie krzywej; przez który chcemy przełożyć płaszczyznę styczną (fig. 14.). Obieramy na niej dowolny punkt Q, którego odstęp od O jest w'. Jeżeli płaszczyzna ma być styczną, to $((w'-w)\, n) = 0$ czyli

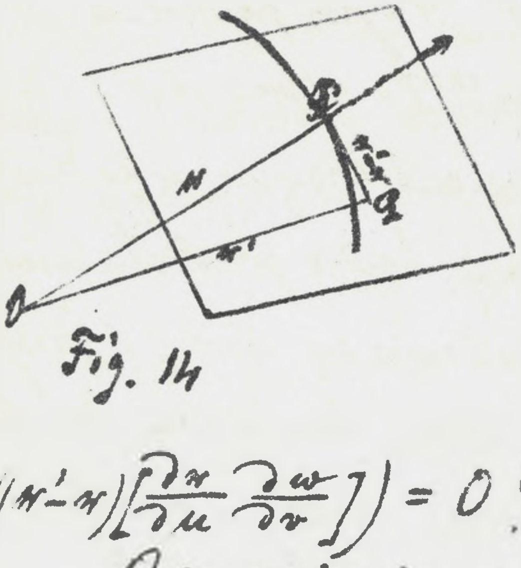


Fig. 14

$$\left((w'-w)\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\right]\right) = 0.$$

Gdy weźmiemy układ prostokątny, to 3 wektory jednostkowe niekomplanarne a b i zastąpić się dadzą przez wektory jednostkowe i j k w kierunkach 3 osi. Wtedy $w = i\varphi(u v) + j\psi(u v) + k\chi(u v)$ albo $w = ix + jy + kz$.

Związek trzech wielkości x y z można wyrazić

$F(xyz) = 0$ wskutek tego jedna funkcya n.p. φ wyraża się przez pozostałe ψ i χ. Tak przechodzimy do równania w zwykłej formie analitycznej.

Wyprowadzimy dalsze konsekwencye:

$n = M\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\right]$ jako parametry u i v można obrać x i y. Wtedy z od nich zależy

$$\frac{\partial w}{\partial x} = i + k\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = j + k\frac{\partial z}{\partial y}$$

Dany zaś jest związek $F(xyz) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{stąd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

i $\frac{\partial w}{\partial x} = i - k\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ analogicznie

$$\frac{\partial w}{\partial y} = j - k\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\left[\left(i - k\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)\left(j - k\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)\right] = ij - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}kj - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}ik +$$

$$+ kk\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = k + i\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} + j\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

tak przedstawia się wektor o kierunku normalnym.

Żeby wykazać, iż wzór ten zgadza się ze zwykłemi wzorami geometryi analitycznej, pomnożymy go przez

$\frac{\partial F}{\partial z}$ wtedy to przejdzie na

$i\frac{\partial F}{\partial x} + j\frac{\partial F}{\partial y} + k\frac{\partial F}{\partial z} = \nabla F$. Wynik jest zgodny, bo jeżeli dany jest wektor $\mathfrak{a} = i a_1 + j a_2 + k a_3$ to

$\cos(\mathfrak{a} x) = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2+a_3}}$ podobnie $\cos(\mathfrak{a} y)$ i $\cos(\mathfrak{a} z)$ stosując to do naszego wypadku, widzimy, że

$\cos(n x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$ które to wzory znane są z geometryi analitycznej. Równanie krzywej przestrzennej wyraziliśmy w formie

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}\varphi(u) + \mathfrak{b}\psi(u) + \mathfrak{c}\chi(u) = \Phi(u)$$

Jeżeli połączymy punkt P (fig. 15.) z nieskończenie bliskim P_1 na krzywej, to $PP_1 = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r} = d\mathfrak{r}$ jest wektorem w kierunku stycznym, którego wielkość nie jest jeszcze bliżej oznaczona, wystarcza to jednak do wyrażenia równania stycznej. Niech będzie punkt na kierunku stycznej Q; to wektor $\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}$ przez PQ ma być równoległy do stycznej, wobec tego

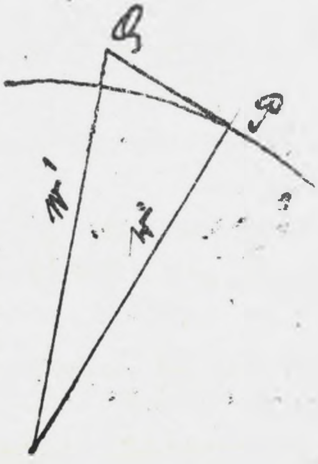


Fig. 15.

$$[(\mathfrak{r}'-\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r}] = 0$$ albo też

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + x\,d\mathfrak{r}.$$

Jeżeli krzywą i płaszczyznę

malną (fig. 16.), trzeba wyrazić, że wektor $r' - r$ jest prostopadły do dr, więc $((r' - r)\, dr) = 0$

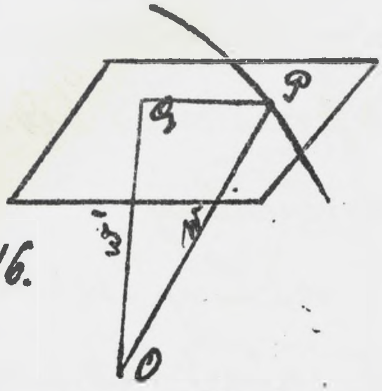


Fig. 16.

Równania przedstawiają się wygodnie, jeżeli jako parametr u obieramy element łuku.

$$r = \varphi(s)$$

$\frac{dr}{ds} = \sigma$ przedstawia wektor jednostkowy, w kierunku stycznym. Przez 3 punkty krzywej nieskończenie bliskie można przeprowadzić płaszczyznę styczną. Jeżeli mamy 3 wektory a b c, to płaszczyzna przełożona przez ich końce jest dana przez dwa wektory $(c - a)$ i $(b - a)$ i punkt bieżący, określony wektorem r' (fig. 17.), które spełniają równania

$$[(r' - a)[(b - a)(c - a)]] = 0$$

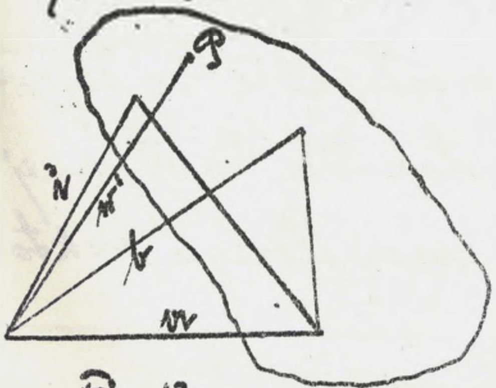


Fig. 17.

Tu postąpimy analogicznie. Mamy punkty krzywej P_1 P_2 P_3 (fig. 18.)

$$[(r' - r_1)[(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)]]$$

przy przejściu do granicy

INSTYTUT FIZYKI UJ BIBLIOTEKA KRAKÓW

$$((w'-w)[dw(dw+d^2w)])=0$$

$$[dw\,dw]+[dw\,d^2w]$$

$((w'-w)[dw\,d^2w])=0$ jest to równanie płaszczyzny ściśle stycznej. Oryentacyę jej w przestrzeni będziemy znali, jeżeli podamy kierunek normalny.

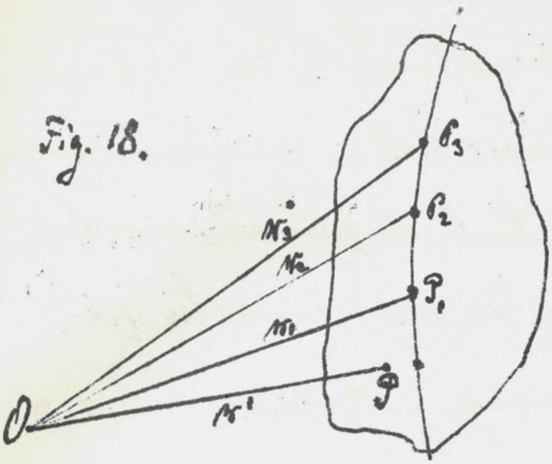
$((w'-w)[dw\,d^2w])=0$ znaczy, że wektory $(w'-w)$ i $[dw\,d^2w]$ są do siebie prostopadłe, $(w'-w)$ jest wektorem w płaszczyźnie, więc $[dw\,d^2w]$ jest do płaszczyzny prostopadły, nazywany go **binormalną**.

$$\mathfrak{b} = U[dw\,d^2w]$$

Jako normalna do kierunku stycznej i binormalnej, jest określony trzeci kierunek, t.zw. normalnej głównej. W ten sposób otrzymamy system trzech współrzędnych; styczne i normalne główne są połączone w płaszczyźnie ściśle stycznej. Równanie normalnej, jako prostopadłej do stycznej i do binormalnej, jako prostopadłej do stycznej i do binormalnej będzie dane przez iloczyn wektorowy z σ i $\mathfrak{b}$

$$N=[\sigma\,\mathfrak{b}]=\left[\frac{dw}{ds}\,U\left[\frac{dw}{ds}\,\frac{d^2w}{ds^2}\right]\right]$$

Fig. 18.



$$n = U\left[\frac{dr}{ds}\left[\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}\right]\right]$$

Normalne główne, wykreślone w 2 sąsiednich punktach P i P' przetną się w punkcie, który nazywamy środkiem krzywizny. Oddalenie tego punktu od punktu P jest promieniem krzywizny. Wektor jednostkowy styczny w punkcie P jest oznaczony przez $\frac{dr}{ds}$, a w punkcie następnym*) przez $\frac{dr}{ds} + \frac{d^2r}{ds^2}ds$; zmianę tę rozkładamy (jak widać na figurze 19.) i druga poołdna ma kierunek prostopadły do stycznej, jest więc zwrócona ku środkowi krzywizny.

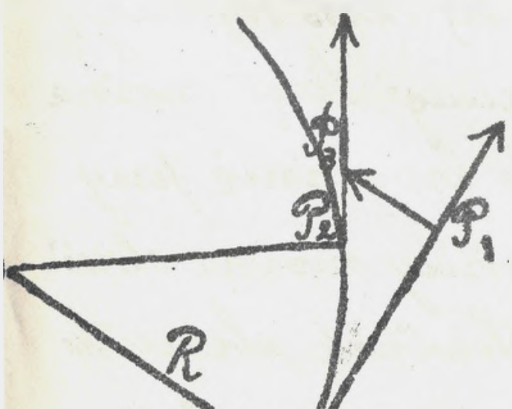


fig. 19

Jeżeli wykreślimy promienie krzywizny PO i P_2O — otrzymamy 2 trójkąty podobne

$P_1P_3T \quad PP_2O$ więc

$$\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right| : 1 = 1 : R \qquad R = OP$$

stąd $R = \frac{1}{\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|}$. W ten sposób otrzymamy wyrażenie na promień

*) Przyrost w otoczeniu jest ds; rozwijamy $\frac{dr}{ds}$ według Taylora i bierzemy w przybliżeniu 2 pierwsze wyrazy.

krzywizny w punkcie P a całkowity $R = \frac{1}{\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|} U\left(\frac{d^2r}{ds^2}\right)$
Na podstawie tego wyrażenia można podać promień ewoluty, zważywszy, że odstęp punktu O od punktu ewoluty musi być równy różnicy odstępu danego punktu na krzywej mniej promień krzywizny $r' = r - R$.

Z kolei przystąpimy do rozpatrywania skrętu krzywej w przestrzeni. Jeżeli kierunek binormalnej jest stały, to płaszczyzna ściśle styczna pozostaje wciąż w tem samem położeniu, krzywa jest wtedy krzywą płaską, a tylko normalna główna będzie się zmieniać w różnych punktach. Jeżeli jednak binormalna zmienia swe położenie w przestrzeni, tak, że system σ, b, N obraca się około stycznej, następuje skręt krzywej przestrzennej. Skręt można określić jako coś, co odpowiada krzywiźnie przy krzywych płaskich. Dla krzywizny można określić promień krzywizny jako stosunek elementu łuku do elementu kąta, który zawierają 2 sąsiednie normalne $R = \frac{ds}{d\varphi}$. W odpowiedni sposób promień skrętu (Torsionsradius) jako stosunek łu-

ku ds do kąta między dwiema binormalnemi:

$T = \frac{ds}{d\psi}$ $\frac{1}{T} = \frac{d\psi}{ds}$

Kierunek binormalnej wyrażony wektorem jednostkowym jest $U\left[\frac{dr}{ds}\ \frac{d^2 r}{ds^2}\right]$ $d\psi$ jest różnicą 2 następujących po sobie wektorów; zatem to samo możemy jeszcze napisać $\frac{1}{T} = \frac{|d\,L|}{ds}$

Zastosujmy otrzymane dotąd wyniki do powierzchni przestrzennych:

Niech będzie powierzchnia walcowata (fig. 20.); dana przez przesunięcie równoległe prostej tworzącej po krzywej płaskiej zamkniętej; obieramy na niej

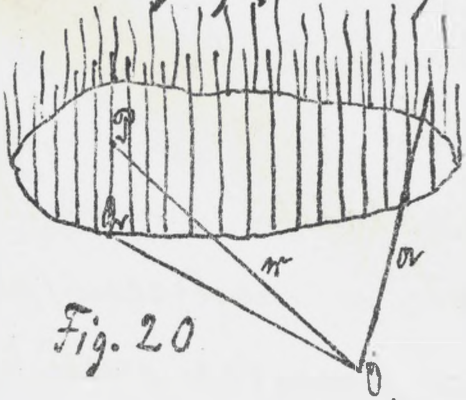


Fig. 20

punkt P, dany przez wektor r

$r = \overline{OQ} + \overline{QP} =$ punkt Q leży na krzywej; gdzie v jest ilością skalarną, v oznacza wektor jednost.

$= \Phi(u) + v\,n$

będzie to ogólne równanie powierzchni walcowatych. Że to jest równanie powierzchni, widać stąd, że mamy 2 parametry niezależne, a że walcowata, — wynika z tego, że mamy v w pierwszej potędze. Można do niej wykreślić normalną

$n = U\left[\frac{dw}{du}\ \frac{dw}{dv}\right]$

$N = U[\Phi'(u)\,w]$ normalna musi być zawsze do w prostopadła gdyż $wN = (w[\Phi'(u)\,w]) = 0$

Weźmy ogólną powierzchnię stożkową (fig. 21.)

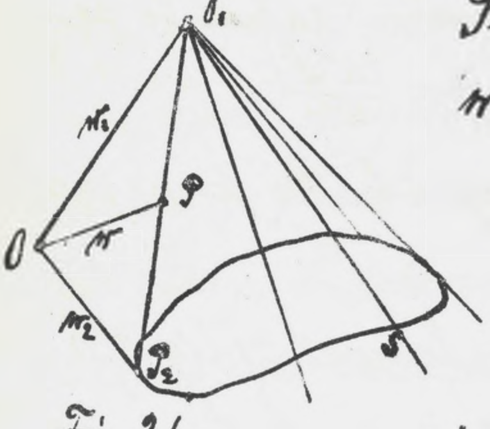


Fig. 21.

Punkt P_1 dany jest przez wektor w_1; z punktu tego wykreślamy prostą, ślizgającą się dokoła krzywej zamkniętej s. Wektor punktu P leżącego na prostej jest w, punktu P_2 na krzywej w_2

$w_2 = \Phi(u) \quad \overline{P_1 P_2} = w_1 - w_2$

$w = w_1 + v(w_1 - w_2)$

$\quad = w_1 + v(w_1 - \Phi(u))$

W odpowiedni sposób można określić powierzchnię utworzoną przez ruch prostej w przestrzeni (powierzchnię rozwijalną). Mamy początek układu O i krzywą s (fig. 22.). W każdym jej punkcie wykreślamy proste, ale o kierunkach zmiennych. Równanie tej powierzchni otrzymamy w podobny sposób, jak równanie ~~[illegible]~~ powierzchni walcowatej; tylko

że tutaj kierunek prostej tworzącej w jest zmienny, a zatem także funkcyą u.

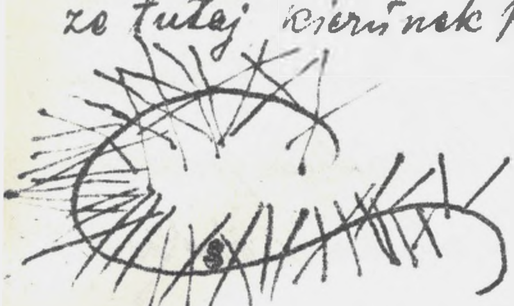


Fig. 22.

$w = \Phi(u) + v\,\Psi(u)$ Tak tworzy się n.p. hyperbola jednopowłokowa.

Jeżeli taka powierzchnia prostokreślna ma być odwijalna, to warunkiem wystarczającym jest żeby proste były zawsze do pewnej krzywej przestrzennej stycznemi. Dwie sąsiednie (proste) styczne określają płaszczyznę, a załamując ją wzdłuż stycznych po sobie następujących, można całą powierzchnię odwijać. Równanie jej otrzymamy, jeżeli zważymy, że kierunek wektora $\Phi(u)$ musi być styczny do krzywej. Wtedy równanie da się sprowadzić do formy

$$w = \Phi(u) + v\,\Phi'(u)$$

Równanie, w którem w jest zależne od 3 zmiennych,

$$w = a\,\varphi(u\,v\,w) + b\,\Phi(u\,v\,w) + c\,\chi(u\,v\,w)$$

oznacza punkt w przestrzeni, przecięcie trzech powierzchni, z których każdą dostaniemy nadając kolejno co dwom parametrom wartości stałe. Wektor w będzie

w każdym punkcie inaczej zorjentowany. Dlatego nie ma żadnej geometrycznej interpretacji. Jest to typowym przykładem zastosowania w fizyce. W każdym punkcie jest dany n.p. wektor siły co do wielkości i co do kierunku, każdemu punktowi odpowiada pewna wartość siły, albo wogóle wektora fizycznego (pole wektorowe). We wszystkich częściach fizyki znajdują się pewne wspólne właściwości, dające się sprowadzić do ogólnych praw, które można uważać za rodzaj geometryi o różnych działach (n.p. Föppla: Geometrie der Wirbelfelder). Cały szereg twierdzeń jest tu natury zupełnie ogólnej; bez względu na to, czy chodzi o siły, czy o inne wektory fizyczne.

Ważną rolę odgrywa operator:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

I. Działanie wykonujemy na funkcyi skalarnej

$$U = f(xyz)$$

$\nabla U = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}$ przedstawia nam to geometrycznie wektor prostopadły do powierzchni $U = const$, a wielkość jego określa się jako gradyent

zmienności U w kierunku normalnym (gdy U uważamy za potencyał ∇U jest ujemną siłą).

II. Stosujemy ∇ do wektora $w = iu + jv + kw$ i tworzymy iloczyn skalarny (∇w) wykonując otrzymamy:
$(\nabla w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} w$ (diwergencya w), gdy w jest prędkością cieczy, wypływającej $\operatorname{div} w$ przedstawia nadmiar ilości cieczy wypływającej z jednostki objętości ponad tę, która wpływa do jednostki objętości.

III. Jeżeli ∇ stosujemy do w w formie iloczynu wektorowego, to

$$[\nabla w] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \operatorname{rot} w$$

Można to interpretować jako ~~rozkład~~ rozkład prędkości w ciele sztywnem, poruszającem się. Jeżeli bryła sztywna posiada ruch postępowy i obrotowy, to pokazuje się, że $\operatorname{rot} w$ jest równa wektorowi, przedstawiającemu wirowanie, kierunkiem wektora jest oś, około której wirowanie następuje, a wielkość podwójną prędkością wirowania. Jeżeli więc rot wektora jest zerem, to powiadamy, że wektor jest położony w sposób niewirowy. —

Będziemy kombinowali ze sobą poznane trzy operacye.

∇ z div nie ma żadnego specyalnego znaczenia.

$\operatorname{div} \nabla U = \nabla^2 U$ jest to znany operator Laplace'a

$\operatorname{rot} \nabla U = 0$ Każdy wektor ∇U jest rozłożony w przestrzeni nie wirowo.

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{w} = 0$ Każdy wektor rozłożony w sposób wirowy ma dywergencyę znikającą (jest nieściśliwy).

Weźmy dalej:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v & w \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ w & u \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ u & v \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$i \left\{ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} + \ldots\ldots =$$

$$= i \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} + \ldots\ldots\ldots$$

Dodajemy $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i odejmujemy $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$= i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - i \nabla^2 u + \ldots\ldots$$

składając odpowiednio dla j i k otrzymamy

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{w} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{w} - \nabla^2 \mathfrak{w}.$$

Przeprowadzimy szereg odpowiednich twierdzeń całkowych przy pomocy rachunku wektorowego, zaczyna-

jąc od twierdzenia Stokes'a. Twierdzenie to odnosi się do zmiany całki liniowej nad krzywą zamkniętą w całkę powierzchniową nad powierzchnią przełożoną przez tę krzywą jako brzeg

$$\mathfrak{A} = iF + jG + kH$$

$$d\mathfrak{s} = i\,dx + j\,dy + k\,dz$$

$$\int(\mathfrak{A}\,d\mathfrak{s}) = \int F\,dx + G\,dy + H\,dz =$$

$$\iint(\mathfrak{N}\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{A})\,dS$$

Że to jest identyczne z tem, co nazywamy twierdzeniem Stokes'a poznamy, jeżeli zauważymy, że $\mathfrak{N}$ jest wektorem prostopadłym do tej powierzchni; składowe jego są $\cos Nx$ $\cos Ny$ $\cos Nz$ a składowe rotacyi są $\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)$ i t. d. Daje to po wstawieniu istotnie twierdzenie Stokes'a, znane w formie współrzędnych prostokątnych. Stąd wyprowadza się wniosek następujący: Jeżeli mamy wektor $\mathfrak{A}$, rozmieszczony w przestrzeni w ten sposób, że całka liniowa między dwoma jego punktami niezależna jest od kształtu drogi, to lewa strona dla drogi zamkniętej znika a zatem i prawa jest zerem.

Jest to możliwe tylko wtedy, gdy rot $\mathfrak{A} = 0$ czyli wektor $\mathfrak{A}$ porównywany jest wirowo (potencyalnie).

Twierdzenie Gauss'a odnosi się do powierzchni zamkniętych. W symbolice wektorowej przedstawi się

$$\iint (\mathfrak{M}\ \mathfrak{N})\, d_1 S = \iiint \operatorname{div} \mathfrak{M}\, dv$$

W celu łatwiejszej interpretacyi przyjmijmy za $\mathfrak{M}$ jestto prąd jakiegoś fluidum. W elektrostatyce braliśmy jako $\mathfrak{M}$ ilość linii l. sił, mówiliśmy, że jeżeli div > 0 istnieją początki linii sił, które nazywamy masami dodatniemi elektryczności, jeżeli div < 0 to istnieją końce linii sił, czyli masy ujemne.—

Identyczność wzoru wektorowego z twierdzeniem Gauss'a można sprawdzić stawiając $\mathfrak{M} = \nabla U$, wtedy otrzymamy

$$\iiint \nabla^2 U\, dv = -4\pi \iiint \frac{\rho\, dv}{\mu}$$

Dla $\mathfrak{M} \neq \nabla U$ (wirowego) otrzymalibyśmy zero, co łatwo pojąć, jeżeli twierdzenie nasze przedstawimy sobie graficznie przez linie sił, bo wektory wirowe mają linie sił zamknięte, które nie wychodzą wcale

poza daną powierzchnię.

Do pozostającego jeszcze twierdzenia Green'a nie stosujemy form wektorowych, gdyż to twierdzenie odnosi się do funkcyi czysto skalarnych.

Zastosowanie tych twierdzeń w razie ogólnym:

Większą część twierdzeń natury ogólnej można pojmować jako zastosowanie geometryi pól wektorowych.

I. Jeżeli wektor wirowy oznacza (siłę) potencyał, to oblicza się siłę

$f = \nabla U$

$\operatorname{div} f = \nabla^2 U$

$$U = \iiint \frac{\rho\, dv}{r} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\nabla^2 U}{r}\, dv$$

To jest ważne dla potencyałów skalarnych. Chodzi przy tem jeszcze o znaczenie pewnych stałych rodzaju stałych całkowania. Jeżeli $\nabla^2 f = 0$, to z tego nie wynika że $f = 0$ bo można dodać jakąś funkcyę $f(x\,y\,z)$. To ma miejsce n.p. w elektrostatyce, gdzie przez jakąś przestrzeń mogą przechodzić linie sił, nie mając tam ani początków, ani końców.

II. Drugi przypadek fundamentalny zachodzi, gdy wek-

tor jest położony w sposób wirowy, co odnosi się do sił elektromagnetycznych. Charakterystyką przy tem jest to, że okrążając przewodnik wykonujemy pewną pracę skończoną, całka nad krzywą zamkniętą $\int F ds$ nie jest potencyałem. W tym razie napiszemy

$f = \text{rot}\,\mathfrak{A}$ nie stosujemy teraz już różniczkowania, ale operacyę rotacyi, co daje nam potencyał wektorowy.

$$\text{rot}\, f = \text{rot}\,\text{rot}\,\mathfrak{A} = \nabla\,\text{div}\,\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A}$$

Łatwo da się udowodnić, że potencyał wektorowy $\mathfrak{A}$ można zawsze tak dobrać że div z niego $= 0$ a przez to ogólna ważność nie znika

$\text{rot}\, f = -\nabla^2\mathfrak{A}$ jestto kształt twierdzenia Poissona wynika stąd, że $\mathfrak{A} = \iiint \frac{\text{rot}\, f}{r}\, dv$

to jest definicya potencyału wektorowego. Można wykazać, że z tego przedstawienia przechodzi się do prawa Biot & Savarta. Jeżeli siła elektryczna da się wyrazić przez potencyał wektorowy, to prawo jej działania będzie identyczne z tem, co poznaliśmy jako pra-

wo Biot & Savarta. Wszystkie to porważania nie dotyczą tylko elektryczności, chodzi jedynie o rozmieszczenie wektorów w przestrzeni; z tego punktu widzenia prawo Coulomba i prawo Newtona nabierają szczególnego znaczenia. Nasuwa się pytanie, dlaczego zawsze napotykamy $\frac{1}{r^2}$. Na podstawie rachunku wektorowego jest to bardzo zrozumiałe; pokazuje się, że każdy wektor f można rozłożyć na 2 części; — jedną potencyalną, a drugą wektorową.

$f = \nabla U + \mathrm{rot}\, \mathfrak{A}$ każda z tych części da się tak wytworzyć, jak tworzymy wektory. Wektory zaś tworzymy tak, że występuje odwrotność $\frac{1}{r}$ a przy różniczkowaniu musi wystąpić $\frac{1}{r^2}$ jest to więc własność naszej przestrzeni trójwymiarowej.

Teorya Maxwella.

Przy zjawiskach indukcyi zdarzają się wypadki, gdzie teorya dawna zjawisk elektrycznych nie jest zadawalniająca. Tak n. p. przy rozbrojeniu kondensatora: jeżeli zjawisko rozbrojenia nie jest zbyt szybkie, można obliczyć na podstawie dawnej teoryi współczynniki samoindukcyi i indukcyi wzajemnej; ale jeżeli wibrator się składa z przewodników o małych rozmiarach i nie posiadających kształtu linijnego (druty), gdzie występują prądy szybkozmienne, tych współczynników w ten sposób obliczyć nie można. Można powiedzieć, że dawna teorya dała się stosować do prądów niezbyt szybko zmiennych, prawie stałemnych, zamkniętych (quasi stationär). Występuje kwestya, jak należy teoryę uogólnić, jeżeli się chce objąć także zjawiska prądów szybko zmiennych. Uczynił to Maxwell na podstawach początkowo bardzo kruchych, wychodząc z pojęcia struk-

twory eteru, z analogii zjawisk elektrycznych i magnetycznych, do hydromechanicznych (zjawiska prądu pochodzą od pewnych ruchów wirowych w eterze). W dziele „Faraday's Kraftlinien" przedstawił swój pogląd na strukturę eteru, który go naprowadził na to, co nazywamy dziś równaniami Maxwella. Teorya ta zrazu nie uzyskała uznania, dopiero gdy Hertz sprawdził doświadczalnie wnioski z niej wypływające, przyjęła się ogólnie. Co stanowi jej jądro, — trudno wypowiedzieć kilkoma słowami. Jedni utrzymują, że jest nim (pojęcia porzucenie) siły, jako actio in distans i przyjęcia ~~siły~~ i przyjęcie siły działającej tylko na najbliższe punkty. Prawdą jest, że Maxwell tak pojmuje siłę i uwydatnia się to w tem, że starał się rozkład sił w przestrzeni wytłumaczyć podobnie jak siły w ciałach sprężystych, — ale w równaniach to się nie uwydatnia, bo równania dają się interpretować w jeden i drugi sposób. Inni twierdzą, że zasadniczą różnicą między równa-

niami Maxwella i dawnemi jest to, że jego równania są różniczkowe, a te, któremi operowali dawni matematycy, były całkowe. To dotyczy przedewszystkiem dwu głównych zasad elektromagnetyzmu 1) zasady siły magnetycznej i 2) zasady indukcyi, i 3) zasady energii. Są to 3 zasady główne, które Maxwell przeistoczył w równania odnoszące się do elementów w przestrzeni położonych. Ponadto należą do teoryi Maxwella pewne poboczne hipotezy n. p. o prądach polaryzacyi.

Zajmiemy się teraz przerobieniem zasad, które już znamy, w formę równań różniczkowych. Zasadę (~~[illegible]~~) elektromagnetyzmu znamy w formie prawa Biota i Savarta, albo też w sformułowaniu, że siła jest wyrażona jako pochodna potencyału $U = i\omega$ zewnątrz przewodników, albo też $f = \text{rot}\,\mathfrak{A}$, ważne w całej przestrzeni, gdzie $\mathfrak{A} = \int \frac{J\,dv}{r}$. Należy to przekształcić w równania różniczkowe, do czego użyjemy prawa Biot et Savarta, a to w nieco odmiennej formie. Jeżeli mamy

przewodnik i wyobrażamy sobie drogę taką, która go raz okrąża, to powiemy, że praca, wykonana podczas obiegnienia przewodnika przez jednostkowy biegun magnetyczny $P = 4\pi i$, gdzie i jest natężeniem prądu, przechodzącego przez przewodnik. Zastosujemy to w razie przewodnika zupełnie ogólnego, powiemy mianowicie, że cała przestrzeń jest przewodząca i że istnieją pewne składowe prądu u, v, w, w kierunkach osi x, y, z; u, v, w są to ilości prądu, przechodzące na sekundę przez cm^2 prostopadle do osi x, y, z.

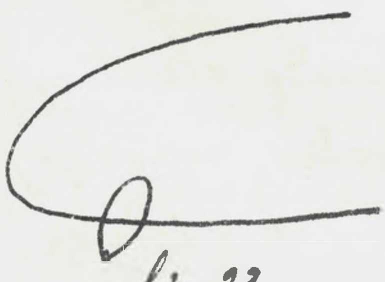


fig. 23.

Przez element, równoległy do płaszczyzny rysunku (fig. 24.) o bokach $dx\, dy$ przechodzi prąd $w\, dx\, dy$, a $4\pi w\, dx\, dy = P$ (praca, wykonana przy okrążeniu). Występuje przy tem siła magnetyczna $f \begin{cases} L \\ M \\ N \end{cases}$, którą kierunek uzyskamy stosując regułę Ampère'a; wobec tego

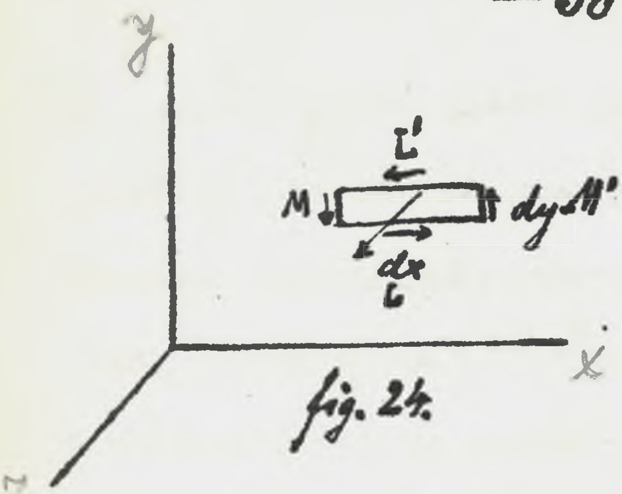


fig. 24.

$$4\pi w \, dx \, dy = M' dy - M dy + L dx - L' dx$$

$$4\pi w = \frac{M' - M}{dx} - \frac{L' - L}{dy} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

To jest pierwsze równanie różniczkowe Maxwella. Element można było przyjąć odpowiednio równolegle skierowany do innych osi:

$$\begin{cases} 4\pi u = \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} \\ 4\pi v = \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi w = \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} \end{cases}$$

Równania te zawierają zasadę elektromagnetyzmu. Można je połączyć w jedno, mnożąc je kolejno przez wektory jednostkowe i, j, k i dodając. Wtedy otrzyma się:

$$4\pi J = \operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

Zauważymy zaraz, że do tego samego wyniku można było dojść używając symbolów wektorowych, a to właś-

nie za pomocą potencyału wektorowego:

$$f = \operatorname{rot} \mathfrak{A} \quad \text{przyczem} \quad \mathfrak{A} = \int \frac{J\,d\tau}{r}$$

$$\operatorname{rot} f = \operatorname{rot}.\operatorname{rot}.\, \mathfrak{A} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A}$$

Stosując równanie Poissona $4\pi\varrho = -\nabla^2 U$ otrzymamy w tym (~~samym~~) wypadku $-\nabla^2 \mathfrak{A} = 4\pi J$ (Natężenie prądu wchodzi w miejsce gęstości). A to jest równanie, które otrzymaliśmy przedtem. Pominęliśmy tu składnik $\nabla \operatorname{div} \mathfrak{A}$, a to dlatego, że $\mathfrak{A}$ można zawsze w ten sposób dobrać, by $\nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$; żądamy bowiem jedynie, by jego rotacya była określona.

W podobny sposób transformujemy równania indukcyi. Zasada była następująca: Siła elektromotoryczna $\mathfrak{E}$ w przewodniku zamkniętym indukowana, równa się ubytkowi (podczas 1 sekundy) linii sił, przechodzących przez powierzchnię przewodnika

$$\mathfrak{E} = -\frac{dp}{dt} = -\frac{d}{dt}\int H_\mu \, dS$$

Tę zasadę stosujemy teraz do odpowiedniego elementu $dx\,dy$. Ponieważ całą przestrzeń uważamy za przewodzącą, będzie nas interesować siła w różnych

częściach tej powierzchni. Wiemy, że czasowa zmienność linii sił, przechodzących przez powierzchnię jest w związku z siłą dokoła indukowaną. Przytem za dodatnie uważamy te linie sił, które wpadają na południową stronę powierzchni, t. zn. na tę, którą widzimy obieganą przez prąd, zgodnie ze wskazówką zegara. Jeżeli więc siła jest skierowana ku nam (fig. 25.), dajemy jej znak +, a wtedy ubytek p równy jest sile $\mathfrak{E}$ w tym kierunku indukowanej:

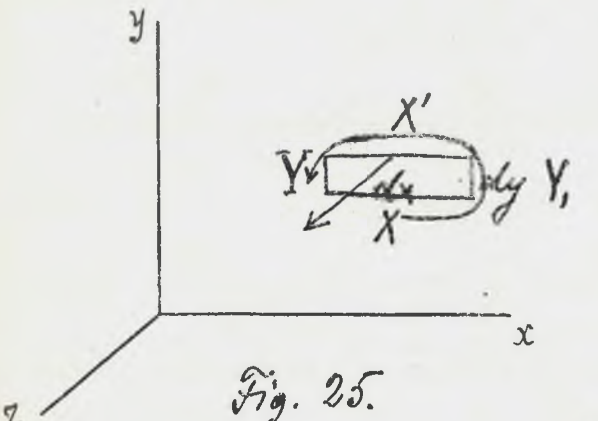


Fig. 25.

$$-\frac{d}{dt}\left(N\,dx\,dy\right) = +\left(Y'-Y\right)dy - \left(X'-X\right)dx$$

$$-\frac{\partial N}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

Jeżeli przestrzeń jest wypełniona pewnym ośrodkiem, który ma stałą magnesowania różną od 1, należy jeszcze lewą stronę pomnożyć przez μ. W ten sposób otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} -\mu\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z} \\ -\mu\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x} \\ -\mu\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y} \end{aligned}\right\},$$

A w jednem równaniu:

$$-\mu\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{E}, \quad \text{gdzie} \quad \mathfrak{E}\begin{cases} X \\ Y \\ Z \end{cases}$$

Pozostaje jeszcze trzecia zasada, zasada energii. Wyraziliśmy ją poprzednio w różnych formach, tak np. $W = \frac{1}{2}\Sigma QU$ i innych. Obecnie przyjmujemy, że ogólnie ważne jest takie wyrażenie na energię:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int K(X^2+Y^2+Z^2)\,dv + \frac{1}{8\pi}\int \mu(L^2+M^2+N^2)\,dv$$

W tych trzech równaniach, któreśmy dotychczas poznali, niema nic hypotetycznego; są one wyrazem tego, co powiadają także dawne teorye, tylko w formie innej. Teraz dopiero przychodzi element, który odróżnił teoryę Maxwella od dawnych.

Mianowicie to, co się nazywa „prądem elektrycznym" składa się podług Maxwella z trzech składników:

1) prąd galwaniczny λf, lub w ogólnym wypadku $\lambda(f-f')$, gdzie f' są to siły elektromotoryczne zewnętrzne, występują one tylko w specyalnych wypadkach, np. w ogniwach galwanicznych tam, gdzie graniczy metal z elektrolitem. Naogół f' występuje tam, gdzie panuje siła termoelektryczna lub chemiczna.

2) hipotetycznie dodaje się do tego prąd polaryzacyi $\frac{K}{4\pi}\frac{\partial f}{\partial t}$, przyczem K jest stałą dielektryczności. Ten prąd zależy od zmienności czasowej siły elektrycznej i powstaje też w dielektrykach, Kf jest polaryzacyą dielektryczną.

3) prócz tego przyjmuje się jeszcze trzeci składnik prąd konwekcyjny. Prądy konwekcyjne powstają wtedy, gdy ciało naładowane elektrycznością

przesuwany mechanicznie z pewną prędkością u; Maxwell twierdzi, że wywierają one taki sam wpływ magnetyczny, jak prądy galwaniczne. Wobec tego

$$\mathfrak{J} = \lambda(\mathfrak{f}-\mathfrak{f}') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + u\varrho$$ (ϱ – gęstość elektr.)

Ostatni składnik $u\varrho$ komplikujący bardzo sprawę występuje tylko przy ruchu mechanicznym, i daje się tylko wyjątkowo dostrzedz bezpośrednio; (wykrył go doświadczalnie Rowland) Składnik ten można na razie opuścić, ograniczając stosowanie teoryi elektro-magnetyzmu do ciał nieruchomych, t.zn. wykluczając ruch mechaniczny w obrębie pola.

Na jakiej podstawie przyjął Maxwell drugi składnik?

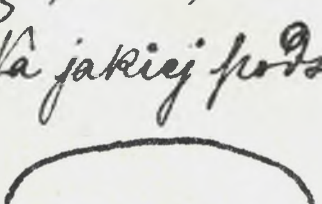


fig. 26

Jeżeli kondenzator (fig. 26) na którego okładkach powstała gęstość $\sigma = \frac{K}{4\pi}X$, rozbroimy, to prąd przepływa w drucie zewnętrznym – Maxwell wyobrażał sobie, że istnieją tylko prądy zamknięte, przyjął więc, że wewnątrz kondenzatora istnieje taki sam prąd,

Mamy wtedy:

$\sigma = -\frac{K}{4\pi} X$, więc prąd na cm^2 powierzchni okładek kondensatora = ubytek gęstości =

$$= -\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}$$

Sama argumentacya jest wartości bardzo hipotetycznej, albowiem przyjęcie, że istnieją prądy wewnętrzne, polega na przypuszczeniu, że elektryczność zachowuje się jak fluidum nieściśliwe, a przypuszczenie to znaczenie swe zawdzięcza tylko temu, że konsekwencye z niego wypływające zgadzają się z doświadczeniem.

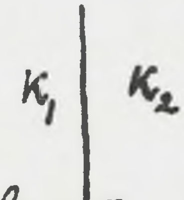
Widzieliśmy, że rot f jest w związku z prądem i że według pola magnetycznego mierzymy prąd. Na podstawie przyjęć Maxwella także prąd polaryzacyi powinien wywierać siłę magnetyczną. Doświadczalnie jednak nie można jej zmierzyć, gdyż jeżeli się ustawia igłę magnetyczną w obręb kondensatora, działa na nią przedewszystkiem prąd krążący w drucie, który zupełnie zakrywa wpływ prądu polaryzacyi

w kondensatorze. Zresztą są to prądy przemienne, igła nie może się tak szybko wychylać, tak że niema nadziei, by przeprowadzić bezpośrednio dowód doświadczalny wpływu prądów polaryzacyi. (Wyniki, które otrzymał w tej mierze Whitehead są bardzo bliskie granicy błędu.) Przyjmujemy prądy polaryzacyi dlatego, że jedynie na tej podstawie potrafimy wytłumaczyć powstanie fal elektrycznych Hertza.

Wprowadziliśmy stałą dielektryczności $\underline{k}$; w równaniach trzymaliśmy się systemu jednostek elektromagnetycznych; zatem $\underline{\mu}$, $\underline{h}$ i $\underline{k}$ muszą być wyrażone w jednostkach elektromagnetycznych cgs, podczas gdy zwykle wyraża się je w jednostkach elektrostatycznych, zatem k trzeba podzielić przez c^2, gdzie c jest prędkością światła.

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{K}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi h\,\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\mathfrak{H} \\ &\qquad \mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E} \\ &W = \iiint\left[\frac{K}{8\pi}\mathfrak{E}^2 + \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2\right]dv \end{aligned}\right.$$

Dalszem założeniem Maxwella jest założenie ciągłości przejść w warstwach granicznych między dwoma środkami (fig. 27). Wyobraża on sobie, że niema



(fig. 27)

powierzchni matematycznej, gdzieby przejście było nieciągłe i że równania zasadnicze pozostają ważne także w owych warstwach przejściowych. Jestto przypuszczenie stosowane i w innych partyach fizyki. — Z tego można wyprowadzić pewne wnioski. — Jeżeli się przypatrzymy równaniom $4\pi u = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$ itd., to zauważymy, że tam wchodzą w rachubę tylko składowe styczne, a niema normalnych; występuje tam np. $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$, a niema $\frac{\partial L}{\partial x}$. Gdy więc założymy ciągłość przejścia, i zmniejszymy warstwę przejścia tak, że granica grubości staje się równa zeru, to te „M" po obu stronach muszą być jednakowe, bo inaczej dzieląc $\frac{M_1 - M}{dx}$ otrzymałoby się pochodne nieskoń-

czenie wielkie.) Ogólnie: przy powierzchniach odgraniczających dwa ośrodki siły styczne po obu stronach powierzchni muszą być jednakowe. Warunek ten już napotykaliśmy w elektrostatyce i magnetyźmie, ale widzimy tu, że ma być ogólnie ważny. Co do składowych normalnych nie można tego wywnioskować; mogą one mieć różne wartości i mają je faktycznie.

Można to traktować w sposób bardziej matematyczny. Wyobrażamy sobie powierzchnię odgraniczającą (fig. 28) i drogę wzdłuż niej zamkniętą.

fig. 28

Nad powierzchnią w tej drodze zawartą tworzymy $\oint \mathfrak{f}\, ds$, to według twierdzenia Stokes'a $\oint \mathfrak{f}\, ds = \int (\text{rot.}\,\mathfrak{f}_n)\, dS$. Po lewej stronie mamy pracę wykonaną przy zakreśleniu tej drogi, daje ona się wyrazić przez rot $\mathfrak{f}$, na którą podstawimy wartość

z równania Maxwella

$$\int \mathfrak{f}\, d\sigma = \int \left(-\mu \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t}\, n\right) dS$$

$\mathfrak{f}$ siła magnetyczna nie może być nieskończenie wielka, tem mniej jej pochodna. Jeżeli dS zrobimy nieskończenie małe, przez to, że drogę zwężamy, to wyrażenie po prawej stronie dąży do wartości 0, więc i po lewej stronie mamy 0. To składa się z dwu części, których suma ma być równa zeru. Więc praca w jednym środku równa się pracy w drugim, dS w obu środkach jest jednakowe, więc przesunięcia styczne są równe. Z tego zrobimy użytek w optyce.

Przyjmijmy obecnie, że równania Maxwella są dane i spróbujmy, czy wnioski stąd wyprowadzone zgadzają się z doświadczeniem.

$$\frac{k}{c^2}\frac{\partial X}{\partial t} = -4\pi\lambda X + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \qquad \mu\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{k}{c^2}\frac{\partial Y}{\partial t} = -4\pi\lambda Y + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \qquad \mu\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\frac{k}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t} = -4\pi\lambda Z + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \mu\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$W=\frac{1}{8\pi}\iiint k(X^2+Y^2+Z^2)\,dv+\frac{1}{8\pi}\iiint\mu(L^2+M^2+N^2)\,dv$$

Po lewej stronie równań mamy pochodne czasowe a po prawej wielkości, które się odnoszą do rozmieszczenia miejscowego. Jest to ogólny typ równań w fizyce przyjętych. Jeżeli znamy rozkład pewnych wielkości fizycznych w przestrzeni, to na podstawie równań fizycznych potrafimy powiedzieć, jak z czasem zmieni się rozkład tych wielkości fizycznych.

Widoczna jest także symetrya tych równań; gdyby $\lambda=0$, istniałaby zupełna symetrya dla sił elektrycznych i magnetycznych. Zestawmy zjawiska elektryczne i magnetyczne posią, dają luźne analogie. Myśl tę zużytkował Heaviside, fizyk angielski, który się przyczynił do matematycznego rozwinięcia teoryi Maxwella przez wprowadzenie rachunku wektorowego. Operuje on głównie za pomocą

analogii zjawisk jednego i drugiego rodzaju. Różnica polega na tem, że istnieją przewodniki i prądy elektryczności, a niema przewodników magnetycznych, a wskutek tego może powstać rzeczywisty ładunek elektryczny, lecz nie może się nagromadzić rzeczywista masa magnetyczna. Gęstością rzeczywistego ładunku elektrycznego nazywamy $\rho_w = \frac{\operatorname{div} K\mathfrak{f}}{4\pi}$ — jest to identyczne z równaniem Poissona. Jeżeli K jest stałe, to:

$$\rho_w = \frac{K}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{f} = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = -\frac{K}{4\pi} \nabla^2 U$$

Odpowiednia definicya dla magnetyzmu, gdyby istniała gęstość rzeczywista, byłaby $\rho = \frac{\operatorname{div} \mu \mathfrak{f}}{4\pi}$. Gęstość ładunków powierzchniowych na granicy dwu środków, σ, uważamy za granicę gęstości przestrzennej, mianowicie za lim stosunku masy wewnątrz zawartej do powierzchni.

$$\sigma_w = \lim \frac{\int \rho_w \, dv}{dS} = \frac{1}{4\pi} \frac{\int \operatorname{div} K\mathfrak{f} \, dv}{dS}$$

Według twierdzenia Gaussa $\int div\, \mathfrak{V} dv = \iint \mathfrak{V}_n dS$, a zatem w tym wypadku

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\int div\, k\mathfrak{f}\, dv}{dS} = \frac{1}{4\pi}\frac{dS(k_1\mathfrak{f}_{1n} + k_2\mathfrak{f}_{2n})}{dS}$$

$$\sigma_w = \frac{1}{4\pi}(k_1\mathfrak{f}_{1n} + k_2\mathfrak{f}_{2n}) = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}_{1n} + \mathfrak{d}_{2n})$$

$\mathfrak{d}$ nazywa się składową polaryzacyi elektrycznej. To jest znowu identyczne z pojęciem gęstości powierzchniowej elektryczności, którą poznaliśmy w elektrostatyce. Jeżeli U jest potencyał, to $\mathfrak{f}_{1n} = -\frac{\partial U_1}{\partial n}$, stąd

$$\sigma_w = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \frac{\partial U_2}{\partial n_2}\right).$$

Co do odpowiedniej wartości magnetycznej definicya jest analogiczna; ale wiemy, że rzeczywistej gęstości magnetycznej niema.

Czasem rozpatruje się pojęcie gęstości swobodnej elektrycznej lub magnetycznej.

$$\rho_f = \frac{div\, \mathfrak{f}}{4\pi}$$

$$\sigma_f = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{f}_{1n} + \mathfrak{f}_{2n}),$$ a różnicę

jednej i drugiej nazywają pozorną gęstością; nie ma ona większego znaczenia, wyjątkowy wypadek, gdy się chce interpretować teoryę Poissona z punktu widzenia teoryi Maxwella.

Powróćmy do wniosków ogólnych, które można wyprowadzić z równań Maxwella. Wypiszmy je

1) $k\frac{d\mathfrak{E}}{d\xi}+4\pi\lambda\,\mathfrak{E}=\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}$

2) $\mu\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\xi}=-\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}$

3) $W=\frac{1}{8\pi}\iiint(k\mathfrak{E}^2+\mu\mathfrak{H}^2)\,dv$,

nadto uwzględnimy warunek na powierzchni odgraniczającej dwa środki. Stosujemy operacyę div.

$$\mathrm{div}\left(k\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\xi}\right)+4\pi\lambda\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}=\sout{\mathrm{div\,rot}}\,\mathfrak{H}=0$$

Przyjmujemy, że własciwości ciała nie zmieniają się z czasem, więc k możemy objąć różniczką, a również div można wprowadzić pod znak różniczkowania

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\mathrm{div}\,k\mathfrak{E})+4\pi\lambda\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}=0$$

ale $\operatorname{div} k\mathfrak{f} = 4\pi\varrho$; $\operatorname{div}\mathfrak{f} = \frac{4\pi\varrho}{k}$

$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{4\pi\lambda}{k}\varrho = 0$, wobec tego $\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{4\pi\lambda}{k}t}$, to znaczy, że gęstość elektryczności w każdem miejscu, gdzie k jest stałe musi opadać z czasem według funkcyi wykładniczej, to znaczy, że elektryczność musi znikać, musi się wyrównać wskutek przewodnictwa; tem prędzej to nastąpi, im większe jest λ. Ponieważ niema idealnych izolatorów, to cała gęstość elektryczności musiałaby zniknąć z czasem, gdyby nie było źródeł elektryczności. Obserwujemy gęstość elektryczności dlatego, że równanie to nie jest ważne dla wszystkich miejsc w przestrzeni, wykluczyliśmy bowiem ruch ciał oraz miejsca, gdzie istnieje $\mathfrak{f}'$, siła elektromotoryczna, powstająca wskutek sił chemicznych i termicznych, to znaczy źródło elektryczności.

Przejdźmy teraz do innej konsekwencyi wypisanych równań. Obliczymy czasową zmianę

ność energii pola elektrycznego:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\iiint\left(k\,\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}+\mu\,\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right)dv$$

Podstawimy wyrażenia z równań zasadniczych Maxwella

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\iiint\left(\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}-4\pi\lambda\,\mathfrak{E}^2-\mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}\right)dv$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\iiint\left[\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}-\mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}\right]dv-\iiint\lambda\,\mathfrak{E}^2\,dv$$

Pierwszą całkę można przeistoczyć. Istnieje twierdzenie z rachunku wektorowego, że jeżeli mamy dwa wektory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, to

$$\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}-\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}=\mathrm{div}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}],\text{ bo}$$

$$A_1\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ B_2 & B_3\end{vmatrix}+A_2\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x}\\ B_3 & B_1\end{vmatrix}+A_3\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}-$$

$$-\left\{B_1\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_2 & A_3\end{vmatrix}+B_2\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x}\\ A_3 & A_1\end{vmatrix}+B_3\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ A_1 & A_2\end{vmatrix}\right\}=$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Zbierzmy $A_1\frac{\partial B_3}{\partial y} + B_3\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(A_1 B_3)$, w odpowiedni sposób obliczy się i inne wyrażenia, a jeżeli roz-winiemy div$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ otrzymamy to samo

$$-[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Jeżeli bierzemy div z tego, to $A_1 B_3$ znajdzie się rze-czywiście przy $\frac{\partial}{\partial y}$ i t.d.-

Opierając się na tem, napiszemy

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = -\frac{1}{4\pi}\iiint \text{div}[\mathfrak{E}\mathfrak{f}]\,dv - \iiint \lambda\,\mathfrak{E}^2\,dv,$$

a całkę przestrzenną z div można zamienić na powierzchniową według twierdzenia Gaussa

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = -\frac{1}{4\pi}\iint [\mathfrak{E}\mathfrak{f}]_n\,d_1 S - \iiint \lambda\,\mathfrak{E}^2\,dv.$$

Zmiana energii w przestrzeni badanej składa się zatem z dwu części, z których pierwsza odnosi

się do powierzchni przestrzeni, a druga do wnętrza. Ten drugi składnik jest to ciepło Joule'a, bo $\lambda \mathfrak{E}$ jest prądem w danym kierunku, a $\lambda \mathfrak{E}^2$ ilość ciepła wywiązana w jednostce czasu. Całkując to nad przestrzenią, widzimy, że to powoduje ubytek energii elektromagnetycznej wskutek tego, że ta energia zamienia się na ciepło. Pierwsza natomiast część przedstawia przyrost energii; wygląda to tak, jak gdyby energia wpływała do środka z przestrzeni zewnętrznej i jakgdyby istniał prąd energii wyrażony przez iloczyn wektorowy z $[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]$ to jest sławny prąd Poyntinga. Wpływa on na to, że energia w polu elektromagnetycznem zachowuje się tak, jak gdyby była czemś płynącem, danem przez iloczyn wektorowy $EH \sin(\mathfrak{E}\,\mathfrak{H})$. Tam, gdzie istnieje równocześnie siła elektryczna i magnetyczna i tam, gdzie nie są one równoległe,

tam istnieje prąd energii w kierunku prostopadłym do nich.

Oczywiście, że przyjęcie takiego prądu zawiera w sobie wiele hypotetycznego. Jest to raczej obraz, który służy do tego, żeby sobie zdać sprawę ze zmian czasowych energii, ale czy coś takiego rzeczywiście istnieje, tego nie wiemy. Tu można zrobić zarzut, że ten rozkład prądu energii jest możliwym rozkładem, ale nie jedynie możliwym. Z tego, że całka ma pewną wartość, nie można wywnioskować jak są rozłożone elementy, czyli można znaleźć jeszcze inne rozwiązania. To jest prawda, ale pokaże się, że ze wszystkich możliwych rozkładów prądów rozkładu energii wzór Poyntinga jest najprostszy. Jeżeli obliczymy zmianę energii w jakiejś przestrzeni występującą, to możemy obliczyć ją albo rozpatrując szczegółowo, jak $\mathfrak{E}$ i $\mathfrak{H}$ są rozmieszczone i wyrachować $\int[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]\,dv$, albo obliczyć

ciepło Joule'a i z osobna supponować, że przez po-wierzchnię tej przestrzeni wpływa energia do środka. W każdym razie otrzymujemy rezultat dobry. Z tego robi się użytek w niektórych częściach teoryi elektronowej. Pomysł Poyntinga naprowa-dził na pojęcie materyalizacyi energii.

Wróćmy znów do równań, by wykazać, o ile re-zultaty otrzymane zgadzają się z tem, co dotychczas wiemy o zjawiskach elektrycznych i magnety-cznych. Zróbmy założenie, że mamy do czynie-nia z układem niezmiennym w czasie, wtedy pochodne $\frac{\partial}{\partial t}=0$. Równania redukują się na

$$4\pi\lambda\, \mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0;$$

Z drugiego równania wynika, że $\mathfrak{E}$ ma mieć poten-cyał, czyli, że jest rozmieszczony w sposób niewi-rowy $\mathfrak{E} = -\nabla U$. Takie więc linie sił muszą mieć początki i końce, albo przejść do nieskończo-ności. Rozróżniamy przytem dwa przypadki.

1) Najprostszy mamy, jeżeli nie ma zmian energii.

elektrostatyka

Zatem wszędzie ciepło Joule'a: $k\mathfrak{f}^2=0$, a stąd wynika, że $\mathfrak{f}=0$. To jest zasadnicze pojęcie elektrostatyki. $\operatorname{div}\mathfrak{f}=\nabla^2 U=0$ w przewodnikach; a we wnętrzu izolatora $\operatorname{div} k\mathfrak{f}=\varrho_w 4\pi=0$, o ile izolator nie został w osta- czny sposób naelektryzowany. Mamy więc ogólnie ważne równanie elektrostatyki $\nabla^2 U=0$. A na powierzchniach ograniczających 2 ośrodki mamy równanie na σ. Jeżeli wartości σ na powierzchni są dane, można obliczyć rozkład elektryczności (Dirichlet).

Podobnie w wypadku magnetyzmu, gdzie będziemy mieć oddzielnie równanie $\operatorname{rot}\mathfrak{f}=0$ i odpowiednie z tego konsekwencye. Istnieje paralelizm zjawisk elektrycznych i magnetycznych. Błędem jest to, że nie obejmuje ta teorya ciał ferromagnetycznych, zjawisk hysterezy itd., to znaczy zjawisk, na których polegają stałe magnesy. Gdyby ich nie było, nie istniałby inny magnetyzm prócz elektromagnetyzmu. Wszystko to tyczy się

wypadku, gdzie niema zmian energii. $\mathfrak{E}$ równa się zeru wszędzie tam, gdzie h jest różne od zera.

(2) Jeżeli to ograniczenie porzucamy, przechodzimy do wypadku, gdzie jest wywiązane ciepło Joule'a $h\mathfrak{E}$; siła elektryczna będzie wciąż równie, wyrażona potencyalnie $\mathfrak{E} = -\nabla U$.

Także równanie Laplace'a pozostaje ważnem, a mianowicie $\nabla^2 U = 0$. Tylko warunki graniczne się zmieniają, bo teraz powierzchnia przewodnika nie musi być powierzchnią aequipotencyalną. Powstaje kwestya osobna, jakie będzie rozmieszczenie siły magnetycznej. Musimy odnieść się do wzorów

$$4\pi h \underset{\mathfrak{J}}{\underbrace{\mathfrak{E}}} = \operatorname{rot} \mathfrak{f}$$

$$4\pi \mathfrak{J} = \operatorname{rot} \mathfrak{f}$$ wykonajmy działanie

rotacyi:

$$4\pi \operatorname{rot} \mathfrak{J} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{f}$$

$$= \nabla \,\text{~~div~~}\, \mathfrak{f} - \nabla^2 \mathfrak{f}$$

$$\mathfrak{f} = \operatorname{pot} \operatorname{rot} \mathfrak{J}$$

$$= \operatorname{rot} \operatorname{pot} \mathfrak{J} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{rot} \int \frac{\mathfrak{J}}{r} dv,$$ gdzie $\mathfrak{A}$

jest potencyałem wektorowym.

Rozpiszmy wyrażenie

$$-\nabla^2 \mathfrak{f} = 4\pi \operatorname{rot} \mathfrak{J}$$

Wtedy mamy:

$$-\nabla^2 L = 4\pi\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$-\nabla^2 M = 4\pi\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$-\nabla^2 N = 4\pi\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Rozwiązujemy te równania na podstawie równań Poissona: $-\nabla^2 U = 4\pi\varrho$, $U = \int \frac{\varrho}{r} dv$.

$$L = \int \frac{\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}}{r} dv = \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{w\,dv}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int \frac{v\,dv}{r} = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}$$

Analogicznie dla M i N, przytem F, G, H są składowe potencyału wektorowego $\mathfrak{A}$.

Trzeba jeszcze omówić wyrażenie dla energji w danym wypadku. Mieliśmy:

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint\left[k\,\mathfrak{f}^2 + \mu\,\mathfrak{f}^2\right] dv$$

zgodnie z tem, co poznaliśmy dawniej, jako wyrażenie dla energji w razie elektrostatyki. Ale w elektrodynamice poznaliśmy wyrażenie

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

Pytamy, czy i ten wypadek jest objęty powyższym wzorem. Przyjmijmy dla uproszczenia $\mu=1$. Ponieważ wiemy, że $\mathfrak{f}=\text{rot}\,\mathfrak{A}$, piszemy zamiast $\mathfrak{f}^2=\mathfrak{f}\,\text{rot}\,\mathfrak{A}$; wtedy jest energia magnetyczna

$$W=\frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{f}\,\text{rot}\,\mathfrak{A}\,dv.$$

A ponieważ wiemy, że

$$\mathfrak{B}\,\text{rot}\,\mathfrak{A}-\mathfrak{A}\,\text{rot}\,\mathfrak{B}=\text{div}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}],\ \text{to}$$

$$W=\frac{1}{8\pi}\iiint \text{div}[\mathfrak{f}\,\mathfrak{A}]\,dv+\frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{A}\,\text{rot}\,\mathfrak{f}\,dv.$$

Stosujemy twierdzenie Gaussa i za $\text{rot}\,\mathfrak{f}$ wstawiamy wartość z równania Maxwella $4\pi\mathfrak{J}=\text{rot}\,\mathfrak{f}$.

$$W=\frac{1}{8\pi}\iint[\mathfrak{f}\,\mathfrak{A}]_n\,dS+\frac{1}{2}\iiint \mathfrak{A}\,\mathfrak{J}\,dv.$$

Pierwszy składnik przedstawia całkę powierzchniową przestrzeni, nad którą całkujemy. Tę powierzchnię odsuwamy do nieskończoności; tam siła magnetyczna staje się nieskończenie mała rzędu $\frac{1}{r^2}$, tak samo potencyał wektorowy rzędu $\frac{1}{r}$, podczas gdy powierzchnia będzie nieskończenie wielka rzędu r^2. W całości zatem całka powierzchniowa staje się wielkością nieskończenie małą rzędu $\frac{1}{r}$.

Wobec tego w nieskończoności pierwsza część znika. Jeżeli zatem obejmujemy <u>całe pole</u> magnetyczne aż do nieskończoności, to energia magnetyczna da się wyrazić w formie $W=\frac{1}{2}\iiint \mathfrak{A}\mathfrak{I}\,dv$. Tę formę można przekształcić wobec tego, że $\mathfrak{A}=\int\frac{\mathfrak{I}}{r}dv$,

$$W=\frac{1}{2}\iiint \mathfrak{A}\mathfrak{I}\,dv=\frac{1}{2}\iiint\frac{\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2}{r}dv.$$

Otrzymane wyrażenie dla energii wzajemnej dwóch przewodników jest nieco odmienne od dawniej uzyskanego, gdyż wchodzi weń element objętości. Gdybyśmy wprowadzili założenie, że przewodniki są liniowe, wrócilibyśmy do wyrażenia na energię wzajemną dwóch przewodników liniowych w postaci $\frac{i_1 i_2}{2}\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}ds_1 ds_2$. Przeto ogólne wyrażenie dla energii, podane przez Maxwella, obejmuje także ten wypadek.

Przechodzimy teraz do wypadku <u>pola zmiennego z czasem</u>. Robimy na razie jeszcze założenie, że zmiany są dostatecznie <u>powolne</u>, t. zn. tak powolne, że można pominąć składnik $k\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}$, ale żeby składnik $\mu\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}$ wchodził w rachubę. Ograniczymy

się na równaniach

$$4\pi \lambda \mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}$$

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathfrak{E}$$

które reprezentują teoryę indukcyi elektromagnetycznej.

Chodzi nam o siłę elektromotoryczną indukowaną w przewodniku zamkniętym. Składa się z siły w pojedynczych częściach, cała siła jest całką

$$\int(\mathfrak{E}\, d\sigma) = \int (\operatorname{rot} \mathfrak{E})_n\, dS$$ (według twierdzenia Stokesa).

Wprowadzamy drugie równanie Maxwella, jest więc

$$\int(\mathfrak{E}\, d\sigma) = \int(X dx + Y dy + Z dz) = -\int \mu \frac{\partial \mathfrak{H}_n}{\partial t}\, dS$$

$\frac{\partial \mathfrak{H}_n}{\partial t}$ i dS są to operacye od siebie niezależne; jedna jest pochodną czasową, druga odnosi się do miejsca; można więc porządek przestawić

$$\int(\mathfrak{E}\, d\sigma) = -\frac{\partial}{\partial t}\int \underbrace{\mu \mathfrak{H}_n}_{\mathfrak{B}_n}\, dS$$

$\int \mu \mathfrak{H}_n\, dS$ przedstawia ilość linii sił przechodzących przez daną powierzchnię. Mamy tem dane

zasadnicze prawo indukcyi, że siła indukowana równa się ubytkowi linii sił przechodzących przez dany przewodnik. Widzimy zatem, że także zjawiska indukcyi są objęte równaniami Maxwella.

Przechodzimy do rzeczy nowych, które wykraczają poza dawną klasyczną teoryę i stanowią właściwość teoryi Maxwella.

Pola elektromagnetyczne szybko zmienne.

W przypadku pól elektromagnetycznych szybko zmiennych musimy uwzględnić pochodne czasowe. Na razie dla uproszczenia przyjmujemy, że mamy do czynienia z izolatorem. Wtedy $4\pi\lambda\mathfrak{E}=0$, i otrzymujemy zupełną symetryę równań. Mamy więc:

$$\frac{k}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\, \mathfrak{H}$$

$$\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\, \mathfrak{E}$$

Stosujemy do pierwszego równania operacyę rot,

a do drugiego $\frac{\partial}{\partial \xi}$

$$\frac{k}{c^2}\frac{\partial \operatorname{rot}\mathfrak{E}}{\partial \xi} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{H}$$

$$\mu \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \xi^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\operatorname{rot}\mathfrak{E} \quad \Big|\ \text{mnożymy przez } \frac{k}{c^2}.$$

Właściwie jest ogólnie $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \nabla\operatorname{div} - \nabla^2$, ale w tym wypadku mamy $\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$, więc

$$\frac{k\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \xi^2} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \nabla^2 \mathfrak{H}$$

Oczywiście można było także wyrugować $\mathfrak{H}$, stosując operacye w kierunku odwrotnym. Tak otrzymuje się dwa pierwsze ważne równania

$$\begin{cases} \dfrac{k\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \xi^2} = \nabla^2 \mathfrak{H} \\[2ex] \dfrac{k\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \xi^2} = \nabla^2 \mathfrak{E} \end{cases}$$

Wykonajmy to samo w współrzędnych prostokątnych. Naprzód wypiszmy równania Maxwella:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k}{c^2}\frac{\partial X}{\partial \xi} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{k}{c^2}\frac{\partial Y}{\partial \xi} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{k}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial \xi} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

$$\left.\begin{aligned}\mu\frac{\partial L}{\partial \zeta}&=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\\ \mu\frac{\partial M}{\partial \zeta}&=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\\ \mu\frac{\partial N}{\partial \zeta}&=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\end{aligned}\right\}(II)$$

Teraz chcemy znaleźć równania, zawierające wiel, kości tylko jednego lub drugiego rodzaju. Pierwsze równanie różniczkujemy względem ζ, a wielkości $\frac{\partial M}{\partial \zeta}$ i $\frac{\partial N}{\partial \zeta}$ podstawiamy z $\underline{II}$.

$$\mu\frac{k}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial \zeta^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\qquad-\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

$$=\nabla^2 X-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

Odpowiednie wyrażenia otrzymamy na Y i Z i składając je, otrzymamy równanie $\frac{k\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}=\nabla^2 f$ (gdyż suma drugich składników div = 0, tam, gdzie jak w dielektrykach niema mas elektrycznych) Powyższa forma przedstawia zasadnicze równanie roz,

chodzenia się ruchu falowego. Poznać to można w specyalnych wypadkach. Zacznijmy od równania na $\mathfrak{f}$, stawiając $\frac{c^2}{K\mu} = a^2$. Wtedy

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \mathfrak{f}.$$

Robimy założenie, że stan pola elektromagnetycznego zależy tylko od współrzędnej x i od czasu, t. j. zakładamy falę płaską a pochodne $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$. Rozpiszmy powyższe równanie w 3 formy

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

A teraz wróćmy do równań (II) $\mu \frac{\partial L}{\partial t} = 0$, więc L jest albo stałą, albo zerem, podobnie z równań (I) wynika, że $X = \text{const}$. Wobec tego $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$. Mamy zatem równania ruchu falowego o składowych w kierunku Y i Z. Najlepiej będzie, jeżeli się te składowe złoży w jedną wypadkową

i w ten kierunek włoży kierunek osi Y; wtedy można skreślić równanie zawierające Z i zostaje:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Kierunkiem rozchodzenia się fali jest oś x, a kierunkiem ruchu drgającego oś y; są to więc fale poprzeczne; ogólny kształt tego ruchu jest

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Jeżeli bowiem to przedstawimy w równaniu, otrzymamy $-\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) =$
$= -a^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$, a stąd $\frac{a^2\tau^2}{\lambda^2} = 1$, czyli $a = \pm\frac{\lambda}{\tau}$.

Znak ± wskazuje, że prócz przyjętego rozwiązania może istnieć drugie

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

Pierwsze równanie przedstawia falę postępującą w kierunku osi X, drugie falę cofającą się. (W pierwszym wypadku przy wzrastającem t, x musi rosnąć, by faza się nie zmieniła, w drugim odwrotnie: dla tej samej

fazy przy rosnącem t, x maleje).

<u>Prędkość fali elektromagnetycznej</u> jest $a = \frac{c}{\sqrt{k\mu}}$. Jeżeli podstawimy $\mu = 1$, to $a = \frac{c}{\sqrt{k}}$, a w eterze $\mu = k = 1$ fala rozchodzi się z prędkością światła $a = c$. Mierzymy c metodą elektrostatyczną albo elektromagnetyczną. Pomiary dały jako wynik $c = 3.10^{10}$ z błędem najwyżej 1%, a metoda-mi laboratoryjnemi z wielką ścisłością $c = 2{\cdot}998.10^{10}$. W izolatorach prędkość rozchodzenia się będzie różna. Będzie ona tem mniejsza, im większa jest stała dielektryczna. Zależnym od prędkości rozchodzenia się jest współczynnik załamania takich fal. (Odwrotny stosunek prędko-ści rozchodzenia się w dwóch ośrodkach daje współ-czynnik załamania $n = \sqrt{k}$). O ile uważamy światło za fale elektryczne, można to do-świadczalnie zbadać. Pokazuje się, że ta relacya sprawdza się bardzo dobrze dla gazów, ale nie dla innych ciał. Widać stąd, że w teoryi elektroma-

gnetycznej jest pewna myśl, która zgadza się z rzeczywistością, ale istnieją jeszcze niedoskonałości. Weźmy kilka dat liczbowych

	n	$\sqrt{k}$
powietrze	1,000294	1,000295
CO_2	1,000449	1,000473
H_2	1,000138	1,000132
C_6H_6	1,50	1,5
Nafta	1,39	1,4
CS_2	1,63	1,6
$CHCl_3$	1,45	2,3
C_2H_5OH	1,36	5
H_2O	1,33	9

By rozstrzygnąć, w czem leżą braki teoryi, które powodują taką niezgodność, zastanówmy się nad istotą fali elektromagnetycznej. Wyobraźmy sobie, że w pewnem miejscu mamy falę płaską w pła-szczyźnie prostopadłej do płaszczyzny figury

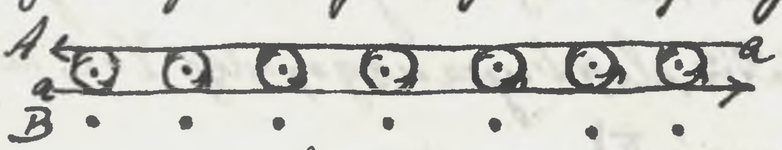


fig. 29.

skręcę pünktów A oznacza prądy polaryzacyi, płyniące kü prądowi. Dokoła tworzą się linie siły pola magnetycznego (wypadkowa a), wskutek których powstanie siła indukowana, przeciwdziałająca prądom pierwotnym, która zniesie je wprawdzie w pünktach A, lecz wytworzy zato prądy nowe, taksamo skierowane, tylko przesünięte w pünktach B. Tak rozchodzą się fale elektromagnetyczne w przestrzeni, przedstawiając zmiany przestrzenne i czasowe sił elektrycznych i magnetycznych, fala elektryczna bowiem jest zawsze związana z falą magnetyczną. Załóżmy, że stan pola elektromagnetycznego zależy tylko od x i od czasu t, (to znaczy właśnie fale płaskie rozchodzące się w kierünkü x), wtedy tak samo, jak poprzednio otrzymujemy $\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0$, a zatem $X=const=0$, $L=const=0$, więc kierünek poprzeczny do kierünkü rozchodzenia; dalej oś z włóżmy w kierünek rozkładü elektrycznego, więc $Y=0$, zatem też $N=0$ (z równań II)

Wskutek tego wszystkie równania redukują się na

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \qquad \mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{k}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$$

$\mu = 1.$

Fala elektryczna jest nierozłącznie związana z falą magnetyczną. Wobec tego, że to jest ruch falowy rozwią., zaniem równania będzie

$$Z = A \sin\left[\alpha\left(t \mp \frac{x}{a}\right) + \varepsilon\right]$$

$$M = B \sin\left[\alpha\left(t \mp \frac{x}{a}\right) + \varepsilon'\right]$$

Chodzi o oznaczenie stałych A, B, ε i ε'. W tym celu bierzemy pod uwagę równanie

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

Stąd otrzymujemy

$$B\alpha \cos\left[\alpha\left(t \mp \frac{x}{a}\right) + \varepsilon'\right] = \mp \frac{A}{a} \cos\left[\alpha\left(t \mp \frac{x}{a}\right) + \varepsilon\right]$$

To równanie jest spełnione pod warunkiem, że

$\varepsilon = \varepsilon'$ (więc obie różnice fazy można opuścić).

$$B = -\frac{A}{a\alpha}$$

$$Z = A \sin\alpha\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

$$M = -\frac{A}{a\alpha}\sin\alpha\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

Zarówno fala elektryczna, jak i magnetyczna postępują w kierunku osi x. Obie są poprzeczne i do siebie prostopadłe, elektryczna w kierunku z, a magnetyczna w kierunku y. Wszystkie zatem trzy kierunki tworzą system trzech osi prostopa-dłych. (fig. 30)

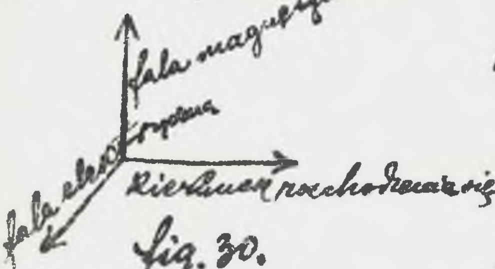
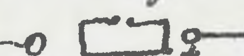


fig. 30.

Jedynie tylko teorya Max-wella tłumaczy nam, dla-czego istnieją tylko fale poprzeczne, podczas gdy teorya eteru sprężystego nie można było wytłuma-czyć, dlaczego nie ma fal podłużnych. Teoryę po-wyższą sprawdził doświadczalnie w roku 1887 Hertz. Za pomocą induktora Ruhmkorffa łado-wał wibrator, który wytwarzał fale elektryczne. Używał 2 konduktorów kulistych o średnicy 15cm, których odstęp wynosił 150cm. (fig. 31)

fig. 31.

Okres drgań kondensatora $\tau = 2\pi\sqrt{LC}$; na wynik otrzymał $\tau = 1,26 . 10^{-8}$ sek. Jednak fale uzyskane w ten sposób nie są płaskie, ale walcowate, a dopiero w wielkiej odległości można je przyjąć za płaskie w przybliżeniu. Istnienie ich wykrył Hertz za pomocą rezonatorów: jest to drut zwinięty w kształt podkowy, zakończony 2 kulkami w pewnym drobnym odstępie. Każdy rezonator odpowiada pewnym drganiom; gdy te powstają, między kulkami przeskakują iskry. Okazało się, że jeżeli płaszczyzna rezonatora była prostopadła do osi vibratora iskry wcale nie występowały, albowiem nie działała żadna siła magnetyczna w płaszczyźnie rezonatora. Gdy rezonator ustawi się tak, żeby normalna do jego płaszczyzny przecinała oś vibratora pod kątem prostym, wtedy istnieją 2 pozycye możliwe: albo przerwa rezonatora jest skierowana ku górze – równo oddalona od obu biegunów  , a wtedy powstają iskry wskutek influencyi elektrycznej, albo leży

naprzeciw jednego z biegunów , a wtedy żadne iskry nie powstają, siła magnetyczna w obu razach nie działa, gdyż rezonatora nie ustawia się w oś między konduktorami, lecz przesuwa przed, lub za tą oś, tam, gdzie fale można uważać za płaskie, a wtedy linie sił są równoległe do płaszczyzny rezonatora. Trzecie jest możliwe położenie prostopadłe do tamtych, (to znaczy, że płaszczyzna rezonatora przechodzi przez oś wibratora), w którem występują efekty najsilniejsze, spowodowane indukcyą linii sił magnetycznych, przeciętych w tym razie prostopadle. W znaczniejszej odległości pierwej znikają efekty influencyi, niż indukcyi elektromagnetycznej.

Uzyskaliśmy wzory na falę elektromagnetyczną; jeżeli uwzględnimy, że:

$$a = \frac{h}{\tau} \qquad \alpha = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$Z = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$M = A\frac{\tau}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\tau}{l}\cdot\frac{1}{a}=n$$

$$M = An \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x}{\lambda}\right).$$

Co się stanie, jeżeli taka fala upadnie na ścianę przewodzącą? (fig. 32)

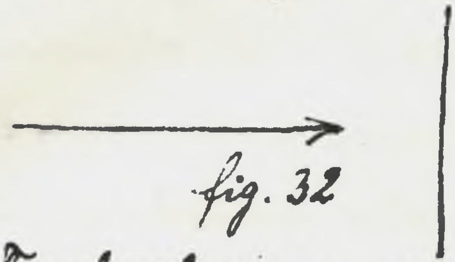


fig. 32

W przewodniku nie może powstać żadna ~~fala~~ siła elektryczna, gdyż napięcie zostaje natychmiast wyrównane; przyjmijmy, że drgania są prostopadłe do płaszczyzny rysunku, to $Y=0$. Siła magnetyczna może istnieć, bo nie ma przewodników magnetycznych. Weźmy falę postępującą

$$\sigma = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

Przy ścianie, dla pewnego x, np. $x=0$, fala niknie; jest to możliwe tylko wtedy, jeżeli przyjmiemy, że istnieje druga fala $B \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{x}{\lambda}\right)$ i w tem miejscu $A=-B$.

A zatem w danych warunkach, gdy istnieje fala postępująca w kierunku osi x, koniecznem

jest, by wracała ze strony przeciwnej taka sama fala ze znakiem przeciwnym, czyli, by nastąpiło zupełne odbicie się fali; różnica fazy wynosi $\frac{1}{2}$ drgania. Ściany przewodzące tworzą zwierciadło doskonałe dla fal elektrycznych. Superpozycję tych dwóch fal możemy też uważać za falę stojącą elektryczną, która będzie posiadać węzeł w ścianie. Zamiast ściany masywnej wystarczy umieścić druty równoległe do osi Z, chodzi jedynie o to, by siła elektryczna w kierunku osi z była zerem, t.zn. przewodnik musi rozciągać się w tym kierunku. Jeżeli jednak siatkę drutów tak umieścimy, że są one prostopadłe do osi Z, to odbicia wcale nie będzie. Widać stąd, że siatka druciana może posłużyć do spolaryzowania fal elektrycznych. Jeżeli fala się składa z wszystkich możliwych drgań w przestrzeni, prostopadłych do x, to przez siatkę przejdą tylko takie fale elektryczne, które są prostopa-

dłe do drutów. Te same rozważania dotyczą odbicia pod kątem; przewodniki tworzą doskonałą zasłonę dla fal elektromagnetycznych.

Badania doświadczalne.

Hertz i jego następcy wytwarzali fale elektryczne w taki sposób, by były jak najkrótsze, czyli, by zbliżały się jak najwięcej do fal świetlnych. Używali więc jak najmniejszych wibratorów i doszli do fal długości 4 mm. Istnienia takich fal trudno dowieść, bo czem mniejszy wibrator, tem mniejsza energia i tem mniejszy skutek. Próbowano tworzyć rezonatory o tej samej częstości drgania, ale jeżeli energia jest mała, to nie wzbudzi iskier. Istnieją inne jeszcze sposoby.

1) Używanie rurek Geisslerowskich; polega na tem, że gaz rozrzedzony stanowi dobry przewodnik i jeżeli drganie przechodzi przez rurkę, to gaz świeci.

2) Bolometr. Jest to drucik, w którym fale wzbudzają prądy bardzo szybko cyrkulujące. Wprawdzie

prądy te są słabe, ale spowodowane przez nie ogrzanie drucika da się skonstatować przez dokładne zmierzenie oporu galwanicznego.

3) Najczulszą jest metoda tzw. kohererów, wynalezionych przez Branly'ego. Są to przyrządy, które polegają na zjawiskach oporu przejściowego przy dotykaniu się metali, lub innych ciał przewodzących. Opór ten maleje przy przechodzeniu fal elektrycznych na bardzo mały ułamek oporu pierwotnego. Używa się ich przy telegrafii bez drutu.

4) Metoda wynaleziona przez Marconi'ego. Detektor magnetyczny Marconi'ego polega na zjawisku hysterezy. Gdy aparat zostaje nagle wstrząśnięty, zjawisko to znika; hystereza zostaje także zniszczona przez falę elektryczną, wobec czego można użyć detektora do wykazania fal elektrycznych.

Umieszczamy jeden magnes stały, a drugi rucho-

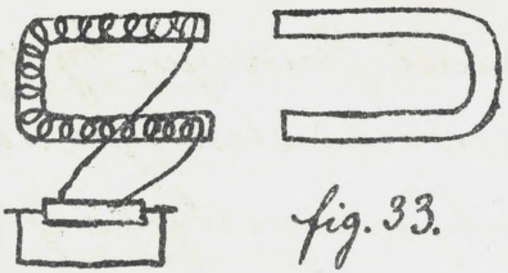
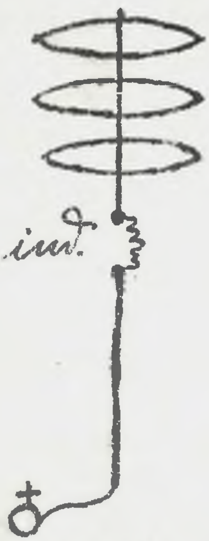


fig. 33.

my tak, że wykonuje ruch obrotowy (fig. 33). Wokoło tego ostatniego są nawinięte zwoje drutów, połączone z transformatorem, prócz tego są zwoje drutów, które przyjmują fale przy telegrafie bez drutu. Zmienia się więc chwilowo wielkość indukcyi w załączonym telefonie, powstaje prąd, który wzbudza trzask w chwili, gdy wpada fala elektryczna. Są to doświadczenia Hertza, wykonane na większą skalę. Chodzi przytem o to, żeby fale elektromagnetyczne były jak najdalej dostrzegalne, t.zn. żeby wprowadzić jak największą ilość energii. Do tego trzeba użyć wibratorów o wielkich rozmiarach. Marconi użył drutu prostego, rozpiętego w kierunku pionowym, zakończonego kulą, naprzeciw której znajduje się druga kula połączona z ziemią; między nie przychodzi induktor Rhumkorffa. Zwykle łączy się

to jeszcze drutem o pewnej samoindukcyi, by wytworzyć rezonancyę. Powstaje siła elektryczna w drucie, za tem liniami siły magnetycznej będą



Antenna:

koła, które się rozchodzą po powierzchni walcowatej. Zauważyć należy, że natężenie siły elektrycznej maleje z odległością w wyższym stopniu, niż siły magnetycznej. Fale wpadają na rezonator „antenna" (drut odpowiedniej długości), w który włączony jest koherer napełniony opiłkami. Fale wpadające pobudzają koherer do zmniejszenia oporu, które może być łatwo wykazane.

Drgania, które się odbywają w takim drucie, są

analogiczne do drgań piszczałki zamkniętej na jednym końcu. $\tau = \frac{l}{4c}$.

Energia nagromadzona może być dość znaczna; wskutek tego zjawisko można spostrzedz w wielkiej odległości, tembardziej, że powstają fale walcowate, a nie kuliste.

Niedogodność jest przy tem ta, że fale zostają bardzo szybko uśmierzane. Wykazaliśmy już, że energia elektrostatyczna kondenzatora naładowanego $\frac{cv^2}{2}$ zamienia się na ciepło Joule'a. O ile jednak chodzi o drgania bardzo szybkie, wchodzi ponadto zjawisko promieniowania energii elektromagnetycznej, a to w większej mierze, niż ciepło Joule'a. Uśmierzanie drgań ~~na~~ elektrycznych

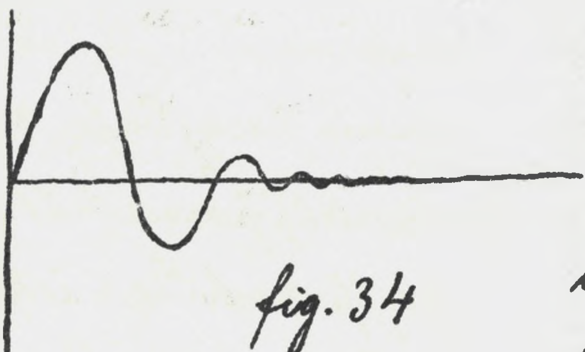


fig. 34

jest więc nadzwyczaj szybkie, i przedstawia się graficznie, jak obok (fig. 34). Efekt jest więc taki, że się przy

tych falach bardzo słabo obserwuje zjawisko rezonancyi, bo do tego potrzeba, by fale były przez jakiś czas trwałe. - Przy telegrafowaniu za pomocą przyrządów Marconiego nie możemy ściśle obserwować zjawiska rezonancyi. Koherer reaguje na wszystkie fale, a detektor wszystkie przyjmuje. Odbieramy zatem sygnały, które pochodzą z różnych przyrządów. Stąd powstaje wielka konfuzya. Zależy więc na tem, by wprowadzić zjawisko rezonancyi tak, by każdy aparat odbierający reagował tylko na pewne przyrządy telegraficzne.

Sposób Brauna. Braun użył dwóch kondenzatorów zupełnie symetrycznych C, C_1. Między nimi znajdują się kuleczki, przez które mogą przechodzić iskry, połączone z induktorem

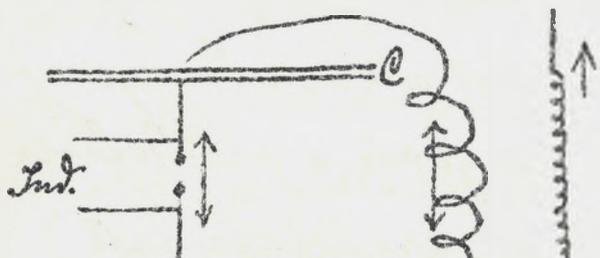


fig. 35.

Ruhmkorffa, służącym, jako źródło elektryczności; ładuje on i rozbraja kondensatory, wskutek czego działa na zewnętrzne okładki i w drucie cewki wewnętrznej powstaje prąd przemienny, a ten przez indukcyę wzbudza prądy przemienne w zewnętrznej cewce, połączonej z anteną wysyłającą. Długość drutu anteny musi być tak dobrana, by istniała rezonancya z okresem drgań kondensatora. Ten przyrząd ma fale o pewnej oznaczonej długości. - Przyrząd, który odbiera fale, jest analogicznie zbudowany. W cewce zewnętrznej jest załączony koherer - rezonancya następuje przy falach o tym samym okresie drgania. # Rozważaliśmy dotychczas falę płaską, postępującą w kierunku osi x. Weźmy teraz falę płaską, postępującą w jakimkolwiek kierunku w przestrzeni. Można ją wyrazić równaniami:

$$X = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{xl+ym+zn}{\lambda}\right)$$

$$Y = A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{xl+ym+zn}{\lambda}\right)$$

$$Z = A_3 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{xl+ym+zn}{\lambda}\right)$$

Że to jest fala płaska, widać stąd, że dla danego t mają jednakową fazę wszystkie te punkty przestrzeni, które spełniają równanie $\frac{xl+ym+zn}{\lambda}$ = const, a to jest równanie płaszczyzny. Przytem l, m, n są dostawami kątów, które tworzy kierunek postępowania tej fali z osiami x, y, z, a A_1, A_2, A_3 są składowemi amplitudy w kierunkach X, Y, Z; co do nich a priori nic powiedzieć nie można.

Robimy teraz specyalne założenie, że fala rozchodzi się w płaszczyźnie rysunku (fig. 36),

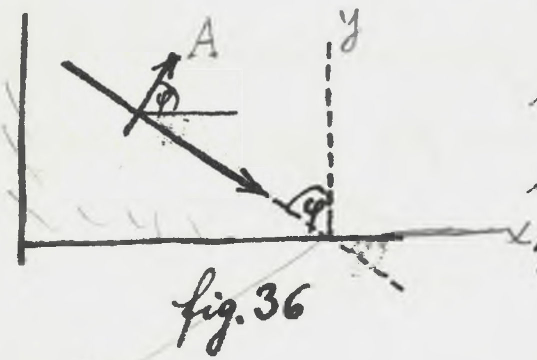


fig. 36

t. zn., że kąt między kierunkiem rozchodzenia się a osią z jest $\frac{\pi}{2}$, zatem $n=0$. Wiemy już, że fale są poprze-

czne; wychylenia będą prostopadłe do kierunku rozchodzenia się. To widzimy zresztą także z równania $\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$, bo jeżeli podstawimy powyższe wyrażenia i wykonamy operacye różniczek, otrzymamy: $A_1 l+A_2 m+A_3 n=0$, więc $Xl+Ym+Zn=0$, to znaczy, że siła $\left\{\begin{matrix}X\\Y\\Z\end{matrix}\right.$ prostopadła do kierunku $\left(\begin{matrix}l\\m\\n\end{matrix}\right)$, tj. do kierunku rozchodzenia się fali. Mogą te fale mieć składową w płaszczyźnie rysunku i prostopadłe do niej. Załóżmy, że fala elektryczna drga w płaszczyźnie figury; składowa prostopadła jest zerem, mamy wtedy drganie spolaryzowane. Oznaczając kąt między dodatnim kierunkiem fali, a osią x przez φ, otrzymujemy w tym wypadku: I. ?

$$X=A\cos\varphi\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x\sin\varphi-y\cos\varphi}{\lambda}\right)$$

$$Y=A\sin\varphi\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x\sin\varphi-y\cos\varphi}{\lambda}\right)$$

$$Z=0$$

Musimy jeszcze uwzględnić falę magnetyczną:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial t}&=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\\ \frac{\partial M}{\partial t}&=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\\ \frac{\partial N}{\partial t}&=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

$Z=0$, zatem i pochodne $\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial y}=0$, a że i $\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial X}{\partial z}=0$, drgania bowiem odbywają się w płaszczyźnie xy, zatem zostaje tylko:

$$\frac{\partial N}{\partial t}=A\frac{2\pi}{\lambda}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x\sin\varphi-y\cos\varphi}{\lambda}\right)$$

$$N=A\frac{\tau}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x\sin\varphi-y\cos\varphi}{\lambda}\right);$$

$$L=M=0$$

Mamy 6 wielkości określonych, które przedstawiają falę postępującą w jakimkolwiek kierunku. Fala magnetyczna jest prostopadła do elektrycznej. (N jest prostopadłe do płaszczyzny rysunku).

Tego wszystkiego potrzeba nam do obliczenia zjawiska odbicia i załamania na powierzchni innego dielektryku. Wyobrażamy sobie, że płaszczyzna xz jest powierzchnią, w której te zjawiska mają nastąpić. Oznaczamy amplitudę drgań wpadających przez A,

drgań odbitych przez B, drgań załamanych przez C. W takim razie siła elektryczna, odpowiadająca drganiom odbitym będzie

$$X' = B\cos\varphi' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi' - y\cos\varphi'}{\lambda}\right)$$

$$Y' = B\sin\varphi' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi' - y\cos\varphi'}{\lambda}\right)$$

$$Z' = 0$$

$$N' = \frac{B}{v}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi' - y\cos\varphi'}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\lambda}{\tau} = v \text{ (prędkość światła).}$$

Ponieważ odbicie następuje w tym samym ośrodku, wielkości v i λ są te same.

Dla fali załamanej jest

$$X'' = C\cos\varphi_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi_2 - y\cos\varphi_2}{\lambda_2}\right)$$

$$Y'' = C\sin\varphi_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi_2 - y\cos\varphi_2}{\lambda_2}\right)$$

$$N'' = \frac{C}{v_2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi_2 - y\cos\varphi_2}{\lambda_2}\right)$$

W drugim ośrodku zarówno λ jak i v są inne.

Amplitudę fali wpadającej uważamy za znaną, a chodzi nam o obliczenie odbitej i załamanej.[3]

Nowe teorye el. i magn. Ark. XII.

Do tego stuży warunek, że na powierzchni odgrani, czającej składowe styczne siły elektrycznej i magnetycznej w obu ośrodkach muszą być równe. Stąd wynika, że

$$\left.\begin{array}{l} X + X' = X'' \\ N + N' = N'' \end{array}\right\} \text{dla } y = 0.$$

A zatem

$$A\cos\varphi \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi}{\lambda}\right) + B\cos\varphi' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi'}{\lambda'}\right) =$$

$$= C\cos\varphi_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi_2}{\lambda_2}\right),$$ co musi być spełnione dla wszelkich wartości t i x; a jest to możliwe tylko wtedy, gdy współczynniki są wszędzie jednakowe. Zatem:

1) $$\frac{\sin\varphi}{\lambda} = \frac{\sin\varphi'}{\lambda} = \frac{\sin\varphi_2}{\lambda_2}$$

$$\sin\varphi = \sin\varphi'$$

A ponieważ promień odbicia nie może być tem samym, co upadający, więc kąty się dopełniają $\varphi' = 180 - \varphi$ (fig. 37), odbicie następuje w kierunku symetrycznym, czyli $\cos\varphi = -\cos\varphi'$.

Dalej widać z 1) że $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_2}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{h}{h_2}=n$ (współczynnik załamania). A zatem prawo załamania przedstawiają wzory:

$$\sin\varphi=\sin\varphi'$$
$$\cos\varphi=-\cos\varphi'$$
$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_2}=\frac{h}{h_2}=n$$

Następujące relacye odnoszą się do amplitud:

X).... $(A-B)\cos\varphi=C\cos\varphi_2$

N)..... $\frac{A}{v}+\frac{B}{v}=\frac{C}{v_2}$, czyli $A+B=C\frac{v}{v_2}=nC=$
$$=C\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_2}$$

Mamy więc:

$$\begin{array}{r|l}\sin\varphi & (A-B)\cos\varphi=C\cos\varphi_2\\ -\cos\varphi_2 & (A+B)\sin\varphi_2=C\sin\varphi\end{array}$$

φ i φ_2 są znane; można stąd znaleźć B i C

$$A(\cos\varphi\sin\varphi-\sin\varphi_2\cos\varphi_2)-B(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi_2\cos\varphi_2)=0$$

$$B=A\frac{\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi_2\cos\varphi_2}{\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi_2\cos\varphi_2}=A\frac{\sin2\varphi-\sin2\varphi_2}{\sin2\varphi+\sin2\varphi_2}$$

$$=A\frac{\cos(\varphi+\varphi_2)\sin(\varphi-\varphi_2)}{\sin(\varphi+\varphi_2)\cos(\varphi-\varphi_2)}=A\frac{tg(\varphi-\varphi_2)}{tg(\varphi+\varphi_2)}$$

Mamy więc

$$B = A \frac{tg(\varphi - \varphi_2)}{tg(\varphi + \varphi_2)}$$

Dla C wzór jest bardziej zawiły; otrzymuje się

$$C = A \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_2) \cos(\varphi - \varphi_2)}$$

Amplituda drgań odbitych może być zerem, gdy $\varphi + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Wtedy żaden promień nie zostaje odbity; odnosi się to specyalnie do tych drgań, które się odbywają w płaszczyźnie upadania — jeżeli zatem wpada fala niespolaryzowana pod tym samym kątem φ, to zostaną odbite tylko drgania prostopadłe do płaszczyzny padania. Jest to zjawisko polaryzacyi płaskiej (liniowej) pod kątem zupełnym polaryzacyi. Stąd można wnioskować, jakie warunki musi spełnić kąt polaryzacyi.

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_2} = n, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = tg\varphi = n$$

Tak wyraża się słynne prawo Brewstera, zna,

łożone doświadczalnie przy badaniu polaryzacyi światła przy wpadaniu na płytę pod różnymi kątami. Widzimy tu jedną analogię zupełną ze zjawiskami optyki. Fresnel starał się je oprzeć na własnościach eteru, lecz dopiero teorya Maxwella pozwoliła na ścisły wywód matematyczny

Rozpatrzymy teraz zjawiska odbicia i załamania <u>fali elektrycznej, drgającej poprzecznie, prostopadle do płaszczyzny wpadania</u>. Jak się wtedy redukują równania? W równaniach zasadniczych położyć trzeba $X = Y = 0$, pozostaje zatem tylko składowa $Z_1 = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi}{\lambda}\right)$. Fala magnetyczna połączona z nią jest prostopadła, ma więc składowe w kierunkach x i y. **II.**

$$\underline{N=0}, \quad \frac{\partial L_1}{\partial t} = -\frac{\partial Z_1}{\partial y} = -A\,\frac{2\pi\cos\varphi}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi}{\lambda}\right)$$

$$\underline{L_1} = -A\,\frac{\tau}{\lambda}\cos\varphi \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi}{\lambda}\right) = -\frac{A}{v}\cos\varphi \cdot$$

$$\cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} = -A_1\,\frac{2\pi\sin\varphi}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi}{\lambda}\right)$$

$$M = -\frac{A}{v}\sin\varphi \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi}{\lambda}\right)$$

Fala odbita będzie przedstawiona przez

$$Z' = B\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi' - y\cos\varphi'}{\lambda}\right)$$

$$L' = -\frac{B}{v}\cos\varphi' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi' - y\cos\varphi'}{\lambda}\right)$$

$$M' = -\frac{B}{v}\sin\varphi' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi' - y\cos\varphi'}{\lambda}\right)$$

A fala załamana przez

$$Z'' = C\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi_2 - y\cos\varphi_2}{\lambda_2}\right)$$

$$L'' = -\frac{C}{v_2}\cos\varphi_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi_2 - y\cos\varphi_2}{\lambda_2}\right)$$

$$M'' = -\frac{C}{v_2}\sin\varphi_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi_2 - y\cos\varphi_2}{\lambda_2}\right)$$

Na powierzchni $y = 0$, odgraniczającej oba ośrodki składowe styczne muszą być jednakowe, zatem

$$\begin{cases} Z + Z' = Z'' \\ L + L' = L'' \end{cases}$$

Argumentacya jest zupełnie analogiczna, jak przy drganiu w płaszczyźnie padania

$$A\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi}{\lambda}\right) + B\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi'}{\lambda}\right) =$$
$$= C\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi_2}{\lambda_2}\right).$$

Skąd wynika:

$$\frac{\sin\varphi}{\lambda}=\frac{\sin\varphi'}{\lambda}=\frac{\sin\varphi_2}{\lambda_2}$$

$\sin\varphi=\sin\varphi'$, zatem może być $\varphi=\varphi'$, albo $\varphi=\pi-\varphi'$; obieramy to ostatnie, bo inaczej kierunek byłby niezmieniony, zatem $\cos\varphi=-\cos\varphi'$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_2}=\frac{\lambda}{\lambda_2}=n \text{ (prawo załamania).}$$

Związki są identyczne z tymi, jakie mieliśmy w wypadku drgań w płaszczyźnie padania. Podobnie dla amplitud

$$A+B=C$$

$$-\frac{A}{v}\cos\varphi-\frac{B}{v}\cos\varphi'=-\frac{C}{v_2}\cos\varphi_2,$$

a ponieważ $\cos\varphi'=-\cos\varphi$

$$\frac{A-B}{v}\cos\varphi=\frac{C}{v_2}\cos\varphi_2$$

Mnożymy przez v, zważając że

$\frac{v}{v_2}=n=\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_2}$, otrzymamy

$$\begin{cases}(A-B)\cos\varphi\sin\varphi_2=C\cos\varphi_2\sin\varphi\\ A+B=C\end{cases}$$

Z tych dwu równań można obliczyć B i C, amplitudy fal odbitych i załamanych,

jako funkcye A, tj. amplitudy drgań wpa,
dających. Dolne równanie mnożymy przez
$-\cos\varphi_2 \sin\varphi$ i dodajemy:

$$A[\underbrace{-\sin\varphi\cos\varphi_2 + \cos\varphi\sin\varphi_2}_{\sin(\varphi_2-\varphi)}] + B[\underbrace{-\sin\varphi\cos\varphi_2 - \cos\varphi\sin\varphi_2}_{-\sin(\varphi+\varphi_2)}] = 0$$

$$B = -A\frac{\sin(\varphi-\varphi_2)}{\sin(\varphi+\varphi_2)}$$, a na tej podstawie

$$C = A\frac{2\sin\varphi_2\cos\varphi}{\sin(\varphi+\varphi_2)}$$

Drgania zachowują się [więc] różnie zależnie od te,
go, w jakim kierunku się odbywają. Drga,
nie w płaszczyźnie wpadania zostaje odbi,
te z innem natężeniem, niż prostopadłe
do niej. W tym drugim razie nigdy amplitu,
da światła odbitego nie znika. Jeżeli drgania
składają się z drgań o różnych kierunkach,
to przy wpadaniu pod kątem polaryzacyi
($tg\,\varphi = n$), tylko drgania prostopadłe do pła,
szczyzny padania zostaną odbite, na tem
polega zjawisko polaryzacyi. Zważymy jeszcze,

co się stanie, gdy drgania wpadają pod kątem prostym; wtedy $\varphi = \varphi_2 = 0$.

$$B = -A\frac{\sin\varphi - \sin\varphi_2}{\sin\varphi + \sin\varphi_2} = -A\frac{n-1}{n+1},$$

gdyż $\sin\varphi_2 = n\sin\varphi$.

Przy odbiciu pod kątem prostym drgania prostopadłe nie znikają, ale mają pewną wielkość daną. Dla drgań w płaszczyźnie padania

$$B = A\frac{tg(\varphi-\varphi_2)}{tg(\varphi+\varphi_2)}$$

Dla bardzo małych φ i φ_2 możemy położyć

$B = A\frac{tg\varphi - tg\varphi_2}{tg\varphi + tg\varphi_2} = A\frac{n-1}{n+1}$, gdyż $\frac{tg\varphi}{tg\varphi_2} \sim \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_2} = n$,

i otrzymamy ten sam wzór co poprzednio, tylko znak jest pozornie inny. Trzeba jednak zważyć, że teraz kierunek drgań jest wprost przeciwny. Inny kierunek oznaczyliśmy jako dodatni przy wpadaniu a inny przy odbiciu.

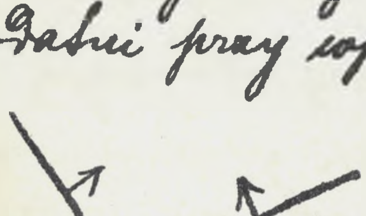


fig. 38.

N.t.el. i m. Art. XIII

Przy odbiciu od ośrodka optycznie gęstszego kierunek drgań się zmienia z dodatniego na ujemny,

czyli (co to samo): występuje różnica faz = ½ drgania. W specyalnym wypadku mieliśmy z tem do czynienia, gdy obliczaliśmy wpadanie fali elektrycznej na płaszczyznę przewodzącą, tam fala została odbitą ze znakiem ujemnym, tak, że przy płaszczyźnie powstawał węzeł. Z teoryi dielektryków wiemy, że z każdego wzoru odnoszącego się do dielektryku można otrzymać wzory dla przewodnika, jeżeli się przyjmie stałą $k=\infty$, zatem $n=\infty$, wtedy okazuje się, że $B=-A$, natężenie fali odbitej równa się natężeniu fali wpadającej. Do tych samych wniosków dochodzimy bardzo łatwo drogą bezpośrednią, jeżeli wyprowadzimy wzory pod założeniem, że fala spolaryzowana wpada na powierzchnię dielektryczną prostopadle (fig. 39), a drgania elektryczne niech się odbywają w kierunku osi y.

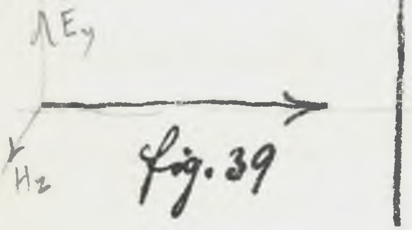


fig. 39

$$Y = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Przytem współistnieje fala

magnetyczna $N = \frac{A}{v} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$. Fala odbita jest $Y' = B \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda}\right)$, a magnetyczna $N' = -\frac{B}{v} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda}\right)$, (Znak −, aby było spełnione równanie $\frac{\partial N}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$) – fala załamana

$$Y'' = C \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda_2}\right)$$

$$N'' = \frac{c}{v_2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda_2}\right)$$

na powierzchni granicznej $x = 0$, tam składowe styczne są sobie równe, więc

$$Y + Y' = Y'' \quad \Big| \quad A + B = C$$

$$N + N' = N'' \quad \Big| \quad \frac{A - B}{v} = \frac{c}{v_2} \quad \text{stąd}$$

$$\begin{cases} A - B = c\,\frac{v}{v_2} = c\,n \\ A + B = c \end{cases} \Big| \; n$$

$$A(n-1) + B(n+1) = 0$$

$B = -A\,\frac{n-1}{n+1}$, występuje więc różnica fazy $\frac{1}{2}$ drgania. Jest to wynik ważny ze względu na doświadczenia Wienera nad falami świetlnemi. Dla fali magnetycznej odbitej rzecz przedstawia się inaczej, tam dla fali odbitej mamy znak dodatni: $N' = +\frac{A}{v}\,\frac{n-1}{n+1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda}\right)$.

Zatem odbita fala magnetyczna drga w tym samym kierunku, co wpadająca, posiada więc przy zwierciadle nie węzeł, ale największe wychylenie. Stąd wniosek, że skutki światła wywołują nie fale magnetyczne, ale elektryczne. Tego à priori nie można było wiedzieć, bo mamy do czynienia zawsze z falami elektromagnetycznemi.

Odkrycie to ukończyło pewne spory ważne pod względem historycznym w teoryi optyki. Fresnel doszedł do tych samych wzorów na podstawie hipotez dość sztucznych. Wyobrażał sobie, że drgania świetlne polegają na przesunięciach eteru, i starał się te zjawiska ująć teoretycznie stawiając postulaty: 1) energia fali odbitej i załamanej jest równa energii fali wpadającej.

2) różnica współczynnika załamania różnych środków polega nie na różnicy sprężystości eteru w tych ośrodkach, ale na różnicy jego gęstości

w nich. To drugie przyjęcie jest dowolne, niczem nieuzasadnione. Zupełnie przeciwną teoryę postawił Neumann. Jeżeli się ze stanowiska tych dwóch teoryi rozpatruje zjawiska odbicia i załamania, wyniki są różne i odpowiadają wzorom wyprowadzonym raz dla siły elektrycznej, drugi raz dla magnetycznej. Stąd powstał spór między uczonymi, który został rozstrzygnięty na korzyść teoryi Maxwella Fresnela dopiero przez doświadczenia Wienera wykazujące, że światło polega na drganiach siły elektrycznej.

Zwróćmy teraz uwagę na wypadek, gdy $n<1$, t. zn. gdy <u>fala elektryczna z ośrodka optycznie gęstszego wchodzi do rzadszego.</u> Widzimy, że nie dla każdego kąta padania α można skonstruować odpowiedni kąt załamania β. $\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = \frac{1}{N}\right)$. $\sin\beta$ może być najwyżej równy jedności. Gdy $\sin\alpha = n$, dla kątów α większych nie możemy dostać odpowiedniego β.

Przy większem α jest β urojone, stąd wnioskuje, my, że wszystkie drgania muszą się odbić. Stosuj, my wzory Fresnela i zobaczymy, jakie stąd wy, nikną konsekwencye. Dla drgań prostopadłych wyprowadziliśmy

$$B_\perp = -A_\perp \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

Kładziemy $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$; $\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}}$, ponie, waż $\frac{\sin\alpha}{n} > 1$, będzie to pierwiastek urojony, $\cos\beta = i\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{n^2} - 1}$

$$B_\perp = A_\perp \frac{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{n} - i\sin\alpha\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{n^2} - 1}}{-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{n} + i\sin\alpha\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{n^2} - 1}}$$

Amplituda światła odbitego wyraża się przez amplitudę światła wpadającego i jakiś czyn, nik, składający się z części rzeczywistej i uro, jonej. Można argumentować w sposób nastę, pujący: Jeżeli mamy wektor światła $\mathfrak{S} = A\sin\alpha\left(t - \frac{x}{v}\right)$, który przedstawia rozwiązanie równania różniczkowego $\frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial x^2}$, może się zdarzyć, że A jest wielkością zespoloną.

$$A = A_0 e^{i\delta} = a(\cos\delta + i\sin\delta)$$

Zatem fala składa się z jednego drgania z amplitudą rzeczywistą i drugiego z amplitudą urojoną. Jakie jest znaczenie amplitudy urojonej? Wiemy, że gdy jest dane $\sin\varphi$, to $\sin(\varphi+\pi) = -\sin\varphi$, $\sin(\varphi+2\pi) = +\sin\varphi$, ogólnie $\sin(\varphi+k\pi) = (-1)^k \sin\varphi$. Uogólnijmy to dla k ułamkowych: $\sin(\varphi+\frac{\pi}{2}) = \cos\varphi = (-1)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi = i\sin\varphi$.

Przyjąwszy to uogólnienie widzimy, że czynnik „i" oznacza przesunięcie o $\frac{1}{2}$ drgania.

Wobec tego

$$A\sin\varphi = a\cos\delta\sin\varphi + a\sin\delta\cos\varphi = a\sin(\varphi+\delta)$$

Przeto drganie otrzymało różnicę faz δ.

Można to przedstawić jeszcze inaczej:

$$\sigma = A\sin\varphi = A\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = R\left(\frac{Ae^{i\varphi}}{i}\right),$$ gdzie R oznacza część rzeczywistą.

Jeżeli teraz przyjmiemy, że A jest zespolone, otrzymamy

$$\sigma = R\left(\frac{A_0 e^{i(\varphi+\delta)}}{i}\right) = A_0\sin(\varphi+\delta)$$

Wprowadzając amplitudę urojoną otrzymuje, my więc różnicę faz δ, co potwierdziły do, świadczenia.

Przy odbiciu zupełnem dostaniemy pod tem założeniem

$$B_\perp = -A_\perp \frac{\cos\alpha - i\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{\cos\alpha + i\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}$$

W odpowiedni sposób dla drgań równoległych do płaszczyzny padania

$$B_\parallel = A_\parallel \frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)} = A_\parallel \frac{\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} =$$

$$= A_\parallel \frac{\cos\alpha - i\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{-\cos\alpha - i\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}} \cdot \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= A_\parallel \frac{\cos\alpha - i\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{\cos\alpha + i\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}} \cdot \frac{i\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - n^2} - \sin^2\alpha}{i\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - n^2} + \sin^2\alpha}$$

Amplitudy można przedstawić w formie

$$B_\perp = B_{0\perp} e^{i\delta_1}; \quad B_\parallel = B_{0\parallel} e^{i\delta_2}.$$

By określić moduł B_0, zważymy, że każde równanie między wielkościami zespolonemi pozostaje ważne, jeżeli zamiast $+i$ wstawimy $-i$, a zatem

$$A_{\perp} \frac{\cos\alpha + i\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{\cos\alpha - i\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}} = B_0 e^{-i\delta}$$, a było poprzednio

$$A_{\perp} \frac{\cos\alpha - i\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{\cos\alpha + i\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}} = B_0 e^{+i\delta}$$

Dla skrócenia piszemy $\cos\alpha = a$; $\sqrt{\sin^2\alpha - n^2} = b$ i mnożymy oba równania przez siebie, wtedy otrzymamy

$$B_0^2 = A^2 \frac{a^2 - i^2 b^2}{a^2 - i^2 b^2} = A^2$$

To znaczy, że natężenie światła odbitego równa się natężeniu światła wpadającego. Dla $D_{\parallel}$ oczywiście otrzymalibyśmy wynik identyczny.

W celu obliczenia δ weźmy pod uwagę światło spolaryzowane, wpadające pod kątem 45°, a to dlatego, że wtedy wektor świetlny rozdziela się na 2 składowe równe $A_{\parallel} = A_{\perp}$. Gdy teraz podzielimy jedno równanie przez drugie, otrzymamy

$$\frac{\sin^2\alpha - i\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{\sin^2\alpha + i\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}} = e^{i(\delta_2 - \delta_1)}$$

Zarówno drganie prostopadłe, jak i równoległe doznaje różnicy fazy czyli opóźnienia drgania.

z powodu odbicia, ale opóźnienia tych dróch częś-
ści są różne. Nas interesuje względna różnica
faz obu promieni.

$\delta_2-\delta_1=\Delta$. Połóżmy $\alpha=e^{i\Delta}$, $\beta=\frac{i\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha-n^2}}{\sin^2\alpha}$

$\alpha=\frac{1-\beta}{1+\beta}$, $\alpha+\alpha\beta=1-\beta$, $\beta=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$; czyli

$$\frac{i\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha-n^2}}{\sin^2\alpha}=\frac{1-e^{i\Delta}}{1+e^{i\Delta}}$$ Równoważne z tem jest

$$\frac{-i\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha-n^2}}{\sin^2\alpha}=\frac{1-e^{-i\Delta}}{1+e^{-i\Delta}}$$

Mnożąc oba równania przez siebie otrzymujemy

$$\frac{\cos^2\alpha\left[\sin^2\alpha-n^2\right]}{\sin^4\alpha}=\frac{1-(e^{i\Delta}+e^{-i\Delta})+1}{1+(e^{i\Delta}+e^{-i\Delta})+1}=\frac{1-\cos\Delta}{1+\cos\Delta}=\frac{\sin^2\frac{\Delta}{2}}{\cos^2\frac{\Delta}{2}}=tg^2\frac{\Delta}{2}$$

Ostatecznie zatem:

$$tg\frac{\Delta}{2}=\frac{\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha-n^2}}{\sin^2\alpha}$$

Jeżeli więc promienie wpadające są nachylone pod kątem 45° do płaszczyzny padania, drga-nie odbite ma natężenie takie samo, jak wpa-dające, ale składowe równoległa i prostopadła mają względem siebie różnicę fazy Δ. To Δ można

obliczyć dla różnych kątów padania.

Jeżeli 1) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\Delta = 0$

2) $\sin\alpha = n$, $\Delta = 0$

Jeżeli promień wpada zupełnie równolegle, albo pod kątem odbicia zupełnego, to $\Delta = 0$; dla wszystkich innych wartości istnieje pewna różnica faz dwóch składowych drgania. Graficznie (fig. 40) przedstawia się to przez wektor $P_1(\xi, \eta)$,

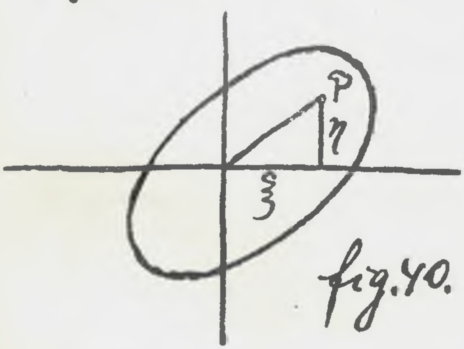


fig. 40.

gdzie ξ i η odbywają drgania harmoniczne.

$\xi = \sin\varphi$, $\eta = \sin(\varphi + \Delta) =$

$= \sin\varphi\cos\Delta + \cos\varphi\sin\Delta$

$\eta = \xi\cos\Delta + \sqrt{1-\xi^2}\sin\Delta$

$$(\eta - \xi\cos\Delta)^2 = (1-\xi)\sin^2\Delta.$$

Otrzymujemy drgania eliptyczne, tylko dla $\Delta = \frac{\pi}{2}$ drganie jest kołowe. By otrzymać drgania kołowe, mimo, że dla szkła np. przy wszelkich kątach padania $\Delta < \frac{\pi}{2}$; dobieramy $\Delta = \frac{\pi}{4}$ i kombinujemy dwa takie odbicia. Jeżeli chodzi

o odbicie ze szkła do powietrza, to $a = \frac{1}{1 \cdot 51}$, a dla $\alpha = 54°37'$ Δ wynosi $\frac{\pi}{4}$, powtarzając zaś odbicie otrzymamy już $\Delta = \frac{\pi}{2}$. Odpowiedni przyrząd skonstruował Fresnel (fig. 41) W punkcie I

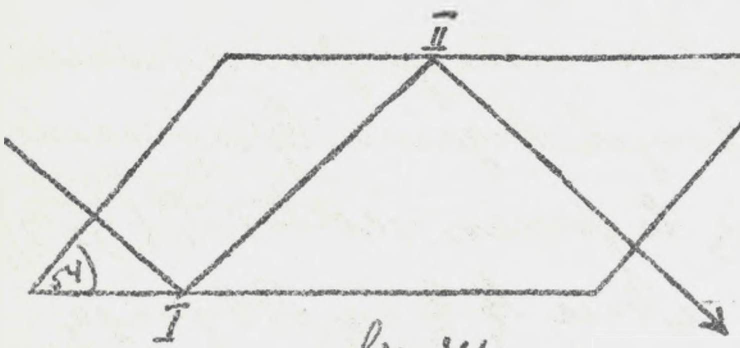


fig. 41

doznaje je, dwa drgania składowe opóźnienia o ¼ drgania, tak samo w punkcie II, wskutek tego promień wychodzący posiada drgania składowe o różnicy faz $\Delta = \frac{\pi}{2}$. Porównując wyniki otrzymane według wzorów Fresnel'a z doświadczeniem widać, że pewne zboczenia w teoryi występują jedynie w pobliżu kąta polaryzacyi, gdzie je tłumaczy się istnieniem warstw przejściowych.

Zupełnie inaczej zachowują się materye silnie absorbujące, szczególnie metale. Są one zwierciadła,

dłami; natężenie światła odbitego jest o wiele silniejsze niż u innych ciał; światło odbite jest zawsze eliptycznie spolaryzowane; nie ma polaryzacyi zupełnej. Pierwsze badania na tem polu pochodzą od Fresnela, teoryę tych zjawisk rozwinął szkocki fizyk Mac Cullagh w r. 1839, powołując się na zjawiska odbicia zupełnego, które występują, gdy promienie wchodzą z ośrodka optycznie gęstszego w rzadszy; przyjął on współczynnik załamania, jako wielkość zespoloną. Z punktu widzenia elektromagnetycznej teoryi światła da się to wszystko wytłumaczyć w sposób zadowalniający.

Uogólnimy obecnie teoryę zjawisk odbicia i załamania dla ciał częściowo przewodzących.

$$k\frac{\partial X}{\partial \xi} + 4\pi\lambda X = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$k\frac{\partial Y}{\partial \xi} + 4\pi\lambda Y = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$k\frac{\partial Z}{\partial \xi} + 4\pi\lambda Z = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

Inne równania zostają takie same, jak przy ciałach izolujących.

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Prócz tego mamy równanie wyrażające, że gęstość elektryczności jest niezmienna.

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

Chcąc mieć wielkości tylko jednego rodzaju, różniczkujemy pierwsze równania względem ξ.

$$k\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + 4\pi\lambda\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

$$= \nabla^2 X$$

Podstawiając zamiast λ — $\frac{1}{\sigma}$, gdzie σ przedstawia opór właściwy, piszemy te równania w formie:

$$K\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{\sigma}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$

$$K\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{\sigma}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}$$

$$K\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{\sigma}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

Odpowiednio dla L, M, N. W formie wektorowej

$$K\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\,\mathfrak{f} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{h}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} = -\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{f}$$

Chcąc wyrugować $\mathfrak{f}$, trzeba brać rotację z pierwszego równania.

$$K\frac{\partial\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{f}}{\partial t} + 4\pi\lambda\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{f} = \mathrm{rot}^2\mathfrak{h} = -\nabla^2\mathfrak{h}$$

$$-K\frac{\partial^2 \mathfrak{h}}{\partial t^2} - 4\pi\lambda\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} = -\nabla^2\mathfrak{h},$$ analogicznie, jak dla sił elektrycznych.

Równania te różnią się od poprzednich skła-
dnikami $\frac{4\pi}{\sigma}\frac{\partial X}{\partial t}$ itd. Jeżeli się ograniczymy
na płaszczyźnie falowym, postępującym w kie-
runku osi X, przesunięcia w kierunku
osi y, więc $\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = 0$.

Niech będzie rozwiązanie

$Y = a e^{i\alpha(t - \beta x)}$ sprawdzając

$$-K\alpha^2 + \frac{4\pi}{\sigma} i\alpha = -\alpha^2\beta^2$$

To się nie da spełnić, w razie gdy α i β są
wielkościami rzeczywistemi; należy podsta-
wić $\beta = \kappa + i\nu$, w takim razie otrzymamy

$$-K\alpha^2 + \frac{4\pi}{\sigma} i\alpha = -\alpha^2(\kappa^2 - \nu^2 + 2i\kappa\nu)$$

Będzie to spełnione, jeżeli

$$\begin{cases} -K\alpha^2 = -\alpha^2(\kappa^2 - \nu^2) \\ \frac{4\pi}{\sigma}\alpha = -2\alpha^2\kappa\nu \end{cases} \quad \text{czyli, gdy} \quad \begin{cases} K = \kappa^2 - \nu^2 \\ \frac{2\pi}{\sigma\alpha} = -\kappa\nu = \frac{\tau}{\sigma} \end{cases}$$

Wobec tego

$$\kappa^2 - \left(\frac{\tau}{\kappa\sigma}\right)^2 = K$$

$$\kappa^4 - K\kappa^2 = \frac{\tau^2}{\sigma^2}; \text{ więc}$$

$$\kappa^2 = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{\tau^2}{\sigma^2} + \frac{K^2}{4}} \; ; \; \nu^2 = \kappa^2 - K = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{\tau^2}{\sigma^2} + \frac{K^2}{4}}$$

$$K = \pm \sqrt{\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{\tau^2}{\sigma^2} + \frac{k^2}{4}}}$$

$$\nu = \pm \sqrt{\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{\tau^2}{\sigma^2} + \frac{k^2}{4}}}$$

Aby na podstawie wielkości liczbowych zdać sobie sprawę z tego, który z tych ~~czynników~~ składników pod pierwiastk. jest ważniejszy, weźmiemy dla przykładu rtęć. Opór/cm³, czyli opór właściwy σ, wobec tego, że 1 Ohm jest zdefiniowany jako opór słupka rtęci o długości 106 cm i przekroju 1 mm², będzie

$$\frac{1}{106 \cdot 100}\ \Omega = \frac{10^9}{100 \cdot 106}\ (\text{el.mg.});$$

$$\frac{1}{\sigma} = 1{\cdot}06 \cdot 10^{-5}$$

Wielkość τ przedstawia okres drgań elektromagnetycznych wpadających. Powiedzmy, że chodzi o fale cieplne długości 10 mikronów. Istnieje relacya, że długość tej fali, która w widmie promieni cieplnych posiada największe natężenie, jest proporcyonalna do temperatury ciała $\lambda_m \vartheta = const. = 289°$. Przy temperaturze $\vartheta = 289°$ (absol.) $= +16$ C.

ciało wydaje fale cieplne długości $10\mu = \frac{1}{100}$ mm. Podstawmy $\lambda = 10^{-3}$ cm, zatem okres $\tau = \frac{\lambda}{c} = \frac{10^{-3}}{3.10^{10}} = \frac{1}{3}10^{-13}$, stąd $\frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{3}10^{-18}$.

Wielkość k, stała dielektryczna, jest w rtęci rzędu jedności, w jednostkach bezwzględnych (el.mg.) $k = \frac{1}{c^2}$. Będziemy więc mieli:

$\kappa = \sqrt{10^{-18} + 10^{-21}}$. Drugi składnik jest do pominięcia w porównaniu z pierwszym, wobec czego wzór się redukuje na

$$\kappa^2 = \frac{\tau}{\sigma}, \quad \nu^2 = \frac{\tau}{\sigma}.$$

Stała dielektryczna nie wpływa na zjawisko w ciałach jak rtęć, ale jedynie przewodnictwo danego metalu i okres drgań wpadających.

$$Y = a e^{i\alpha(t - \beta x)} \qquad (\beta = \kappa + i\nu)$$

$$= a e^{i\alpha(t - \kappa x) + \alpha\nu x}$$

$$= a e^{\alpha\nu x} \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} \{\alpha(t - \kappa x)\}$$

Jest to zatem fala postępująca w kierunku osi x z prędkością $v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\kappa}$ w związku ze

współczynnikiem załamania; amplituda maleje ze wzrostem x w miarę wykładnika $\alpha\nu$.

$$\alpha\nu = \frac{2\pi}{\tau}\nu = \frac{2\pi}{\tau}\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\sigma\tau}}.$$

Absorbcya będzie tem silniejsza, im mniejsze σ, opór właściwy, czyli czem lepsze przewodnictwo, oraz im mniejsze τ, czyli im krótsza fala wpadająca. Liczbowo w poprzednim przykładzie wypada:

$$\alpha\nu = \frac{2\pi}{\sqrt{\sigma\tau}} = \frac{6}{\sqrt{3.10^{-7}}} = \frac{6}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10^{-8}}} = 10^4,$$

t.zn., że w odstępie $x = 10^{-4}$ cm amplituda zmniejsza się w stosunku $\frac{1}{e} = \frac{1}{2{\cdot}7}$ mniej więcej na trzecią część pierwotnej, zatem natężenie na dziewiątą część pierwotnego. Jest to więc ośrodek nadzwyczajnie silnie absorbujący, kiedy przez płytkę grubości 0·001 cm. przechodzi zaledwie 9-ta część pierwotnego natężenia.

Interesują nas teraz dalsze konsekwencye

które występują pod przyjętem założeniem przy odbiciu i załamaniu. Rozważanie będzie takie same, jak przedtem, dojdziemy do tych samych wzorów Fresnela:

$$B_{\parallel} = A_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}, \quad B_{\perp} = -A \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}$$

$$B_{\varphi = 0} = -\frac{n-1}{n+1} A$$

Trzeba jednak zważyć, że teraz współczynnik n składa się z części rzeczywistej i urojonej (n jest stosunkiem prędkości w próżni i danym ośrodku)

$$Y = a e^{i\alpha(t - \beta x)}$$

Prędkość zależy od β, gdyż

$$dt - dx . \beta = 0, \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\beta}$$

a $$n = \frac{c}{v} = c\beta = c(\kappa + i\nu)$$

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi}{n} = \frac{\sin\varphi}{c(\kappa + i\nu)}$$

Wobec tego amplitudy fal odbitych są złożone z części rzeczywistej i urojonej w postaci $B = B_0 e^{i\delta}$, przyczem B_0 przedstawia amplitudę drgania

rzeczywistego, a „δ" różnicę faz drgania odbitego względem wpadającego.

Zanim przejdziemy do ogólniejszych wzorów, ograniczymy się na specyalnym przypadku $\varphi = 0$.

$$B = -A\frac{n-1}{n+1} = -A\,\frac{c(k+iv)-1}{c(k+iv)+1} = B_0 e^{i\delta}.$$

A że każde równanie między wielkościami ze„spolonemi pozostaje ważne, gdy zmienimy $+i$ na $-i$, więc też

$$B' = -A\,\frac{c(k-iv)-1}{c(k-iv)+1} = B_0 e^{-i\delta}.$$

Przez pomnożenie tych równań stronami otrzymujemy:

$$B_0^2 = A^2\frac{(ck-1)^2+c^2v^2}{(ck+1)^2+c^2v^2} = A^2\frac{(c^2k^2+c^2v^2-2ck+1)}{(c^2k^2+c^2v^2+2ck+1)}$$

Wzór ten można otrzymać także pod przy„jęciem innej teoryi rozchodzenia się fal, byle n złożone było z części rzeczywistej i urojonej. Specyalizujemy to według teoryi Maxwella, kładąc $k^2 = v^2 = \frac{\lambda}{c\sigma}$ i dzieląc równocześnie li„

cznik i mianownik przez $2c^2$:

$$B_0^2 = A^2 \frac{K^2 - \frac{K}{c} + \frac{1}{2c^2}}{K^2 + \frac{K}{c} + \frac{1}{2c^2}}.$$ Jeżeli cK jest dosta-tecznie duże, można $\frac{1}{2c^2}$ pominąć w porównaniu z innymi składnikami, wtedy

$$B_0^2 = A^2 \frac{1 - \frac{1}{cK}}{1 + \frac{1}{cK}} = A^2\left(1 - \frac{2}{cK}\right); \quad K = \sqrt{\frac{\lambda}{c\sigma}}, \quad cK = \sqrt{\frac{c\lambda}{\sigma}}$$

otrzymany współczynnik $R = 1 - \frac{2}{cK} = 1 - \frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{c\lambda}}$ nazywamy zdolnością odbicia (Reflexionsvermögen). Dla rtęci, dla fal długości 10 mikronów jest $R = 1 - \frac{2}{\sqrt{300}} = 1 - \frac{2}{17} = 1 - 12\% = 88\%$

Zdolność odbicia jest bardzo wielka, stąd pochodzi blask metaliczny, polegający jedynie na tem, że większa część promieni zostaje odbita, co można poznać, obserwując odbicie zupełne na powierzchni wody; wydaje się wtedy, że woda ma powierzchnię metaliczną.

Pomiary mające stwierdzić zgodność teoryi z doświadczeniem – czy rzeczywiście gdy jest dane przewodnictwo metalu σ z pomiarów elektrycznych, można wnioskować o własnościach

optycznych wykonali Rubens & Hagen 1902 i stwierdzili słuszność teoryi, jeżeli chodzi o promienie długie, pozaczerwone, cieplne, lecz nie dla zwykłych promieni świetlnych. Zdolność odbicia wzrasta z długością fali elektrycznej wpadającej:

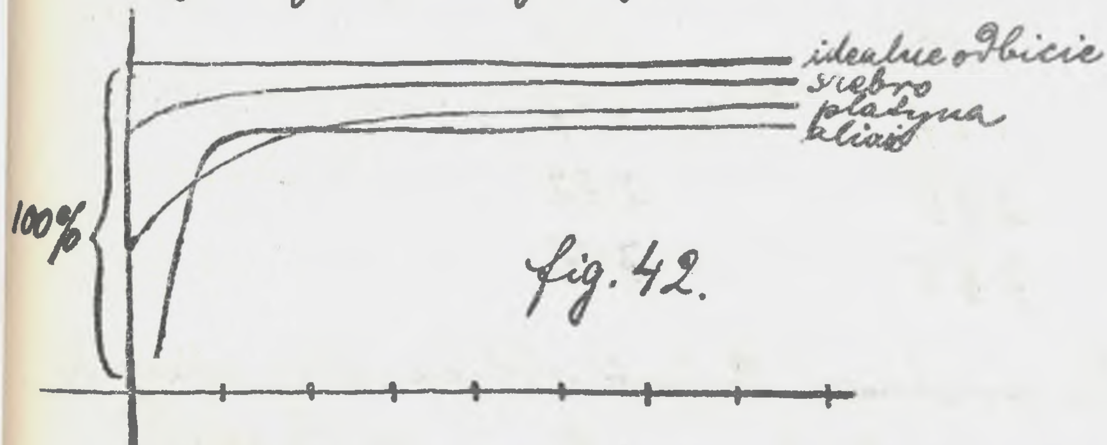


fig. 42.

W przedstawieniu graficznem (fig. 42) jako odciętą bierzemy długość fal λ w mikronach, jako rzędną R. Przy nieznacznych długościach λ występują nieregularności, ale począwszy od 3-4 mikronów przebiegają równolegle, jak wypada według teoryi Maxwella. Czem większa długość, tem bardziej zbliża się zdolność odbicia

do zwierciadła idealnego.

Poniżej przytoczone są pewne dane liczbowe. (1–R)100 przedstawia ilość procentów światła nieodbitego, obliczoną dla fal cieplnych pochodzących od ciała ogrzanego do 170°.

	obliczono	znaleziono
Ag	1·15	1·13
Cu	1·27	1·17
Pt	2·96	2·82
Hg	7·55	7·66

Można też porównać zdolność odbicia przy różnych temperaturach. Liczby są podane w tej tablicy w innych jednostkach, mianowicie przez wychylenie galwanometru. –

Pt.	obliczono	znaleziono
$\vartheta = 170°$	6·8	6·6
300	14·8	15·7
900	78·9	79·6
1500	191	189·5

Co do sposobu, jak pomiary te wykonano, to mierzono nie zdolność odbicia, ale zdolność emisyjną, o której wiemy według Kirchhoffa, że jest w ścisłym

związku ze zdolnością absorbcyi i odbicia. Cia,
ło, które jest dobrem zwierciadłem, ogrzane wy-
syła mało promieni, ciało czarne odwrotnie.
Zgodność liczb otrzymanych jest tak dobra,
że wprost z danych optycznych można obliczyć
przewodnictwo metali, lecz zawsze tylko odnośnie
do długich fal. Drude zaś stwierdził, że we widmie
widzialnem występują nieregularności:

$\lambda =$ 0·45, 0·5, 0·55, 0·6, 0·65, 0·7.

	fiol.	nieb.	ziel.	żółte	pom.	czerw.
R dla Au	36·8,	45·7,	75,	86,	88,	92
R " Cu	49,	53,	60,	84,	89,	91
R " Ag	91,	92,	92,	93,	94,	95

Złoto odbija najsilniej promienie żółte — czer-
wone, niebieskie natomiast bardzo słabo, stąd
też jego barwa, miedź również odbija bardziej
czerwone, a srebro prawie wszystkie odbija
jednakowo, co powoduje barwę szarą; jest to
zresztą w zgodzie z tem, że im lepszy jest prze-

wodnik, tem lepsze zwierciadło.

Nieregularności tych, występujących we widmie widzialnem, nie można oczywiście wytłumaczyć według teoryi właśnie co rozwiniętej (jako skutki przewodnictwa). Ale można rozwinąć rachunki na B, podobnie, jak to było zrobione dla odbi„cia zupełnego, przyjmując spółczynnik zała„mania złożony z części rzeczywistej i urojonej. Światło wpadające niech ma równe składo„we w kierunku prostopadłym i równoległym, wtedy

$$\frac{B_{\parallel}}{B_{\perp}} = \frac{B_0 e^{i\delta_1}}{B_0 e^{i\delta_2}} = -\frac{\cos(\varphi+\chi)}{\cos(\varphi-\chi)} = e^{i(\delta_2-\delta_1)}$$

Zważyć należy, że φ i χ są połączone przez zwią„zek urojony; przy rozwinięciu pokazuje się, że światło wpadające jest odbite eliptycznie, a różnica faz jest zależna od kąta wpadania i od wielkości optycznych. Analizując światło wychodzące można odwrotnie wnioskować o współczynniku załamania i wogóle o własnościach

optycznych danego ciała. Badania w tym kie-
runku robili Jamin, Drude, Zakrzewski. Przeszko-
dą przy doświadczeniach tego rodzaju jest fakt,
że powierzchnia zwierciadła nie jest nigdy zu-
pełnie czystą, a główna trudność, z którą eks-
perymentatorzy mają do czynienia, polega
na szlifowaniu czystych powierzchni metalo-
wych.

Drude otrzymał bardzo oryginalne współ-
czynniki (dla części rzeczywistej, zależnej od v),
tak np. dla światła sodowego $\lambda = 0{\cdot}59$.

n dla Ag .... 0·18
Au .... 0·37
Pt .... 2·06
Cu .... 0·64
stali .... 2·41
Hg .... 1·73

Mamy tu współczynniki załamania niektóre
większe od jedności, inne mniejsze, co wska-

zuje na to, że światło w metalach rozchodzi się prędzej, niż w próżni. Wydawało się to niemożliwem, teraz jednak stwierdzono, że tak jest w istocie. Współczynnik załamania n w metalach da się zmierzyć bezpośrednio, jeżeli warstwa jest cienka. Taką warstwę cienką, klinowatą

wytwarza się przez rozpróżenie elektryczne drucika, np. srebra w próżni. Kąt można mierzyć prążkami Newtona i stąd obliczyć n. Liczby otrzymane zgadzają się z temi, które podał Drude.

fig. 43.

Niech (fig. 43) oś pierwszorzędna oznacza długość fali, oś drugorzędna część rzeczywistą współczynnika nr, to krzywa powstająca przed,

stawia dla metali według poprzednio wyprowadzonego wzoru $[n] = k = \sqrt{\frac{c\lambda}{\sigma}}$) przebieg dyspersyi anormalny, podczas gdy normalnie współczynnik załamania jest tem większy, czem krótsze fale – tak zachowują się przeważnie wszystkie substancye przezroczyste. Anormalną dyspersyę metali tłumaczy się znaczną absorbcyą, która jest powodowana przewodnictwem metali. Według Maxwella izolatory zupełne, nie posiadające absorbcyi, nie powinny też mieć dyspersyi, gdyż wszystkie fale rozchodzą się jednakowo prędko $n = \sqrt{k}$. Zjawisko dyspersyi w ciałach przezroczystych nie tłumaczy się teoryą Maxwella, gdyż podług niej mogłaby istnieć tylko dyspersya anormalna. Dla przewodników niemetalowych jest wpływ przewodnictwa bardzo mały, tak, że się nie może uwydatnić. Zwłaszcza, ze wzoru $k^2 = \frac{k}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{k^2\lambda^2}}\right]$ jeżeli się obliczy σ, widać że

drugi składnik znika. Zjawisko dyspersyi w niemetalach nie da się zatem objąć teoryą Maxwella, a to samo odnosi się do metali dla fal krótkich. Skąd to pochodzi? Musi zatem w tem wszystkiem wielką rolę odgrywać jeszcze jakiś czynnik, o którym dotychczas nie było mowy. Jako taki przyjmuje się drgania własne elektronów w ciałach przezroczystych, które można sobie wyobrazić, jako drgania mechaniczne, albo jako rodzaj drgań elektrycznych, jak w wibratorze Hertza. Te drgania własne wskutek rezonancyi muszą wpływać pośrednio na szybkość, z którą fala się rozchodzi w danym ośrodku. Rozwijając tę teoryę otrzymuje się wzory na dyspersyę normalną, zgodną z doświadczeniem.

Należy zauważyć, że także wśród ciał przezroczystych istnieją takie, które

są przeźroczyste dla fal świetlnych, ale dla fal o pewnej długości są nieprzeźroczyste. Są to przedewszystkiem ciała silnie zabarwione, np. para jodu, roztwór fuksyny itp. Tam, gdzie znajdują się smugi absorbcyi, występuje dyspersya anormalna. Istnieje pewien związek z tem, co mówiliśmy o metalach; okazuje się bowiem, że gdy n jest złożone z części rzeczywistej i urojonej, otrzymuje się absorbcyę z dyspersyą anormalną.

Mamy w tem pewne wskazówki, pod jakim względem należy uzupełnić teoryę Maxwella; trzeba mianowicie uwzględnić drgania własne. Skąd przychodzimy na ten pomysł? Jeżeli obserwujemy dyspersyę w jakimś gazie świecącym, np. dla pary sodu, to dla linii D, gdzie $\lambda = 0,589\,\mu$ mamy silną absorbcyę. Podając zależność współczynnika załamania od długości fal wpadających, to widzimy, że rośnie

z malejącem λ aż do D, gdzie występuje anormalność. Nagle silnie maleje, a potem znowu rośnie. Wy-

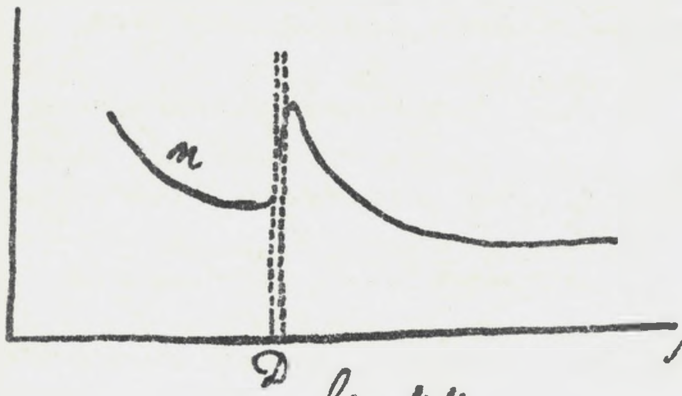


fig. 44.

stępuje zatem oczywisty związek dyspersyi z absorbcyą. Wiemy zaś, że absorbcya jest związana ze zdolnością emisyjną, widać więc, że drgania własne pary sodu są powodem i absorbcyi i dyspersyi.

Dalsze zastosowania teoryi Maxwella.

Mówiliśmy dotychczas o falach, które się rozchodzą w przestrzeni wolnej. Możnaby w tym kierunku dalej prowadzić badania, np. załamanie przez pryzmat, uginanie etc, ale przy tem nic nowego nie zyskujemy, prócz ścisłej analogii z optyką. Specyalny dział doświadczeń dotyczy rozchodzenia się fali

wzdłuż drutów. Liczne experymenta na tem polu wykonał szczególnie Lecher. Używał on jako wibratora płyt kondensatora (AB fig. 45), połączonego z aparatem Ruhmkorffa.

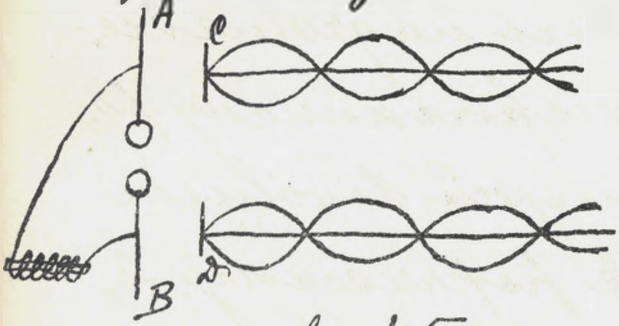


fig. 45.

Płyty ładują się kolejno dodatnio i ujemnie, a wskutek indukcyi na płytach przeciwległych płytom kondensatora (CD) powstają ładunki odwrotne, z tych zaś rozchodzi się elektryczność wzdłuż drutów; końce drutów tworzą przegrodę, przez którą prąd nie może przejść, musi się więc odbijać, wskutek czego powstają miejsca węzłowe i największych wychyleń, a to tam, gdzie różnica potencyałów między drutami będzie maksymalna, względnie minimalna, to znaczy że powstają fale stojące. Można to

wykazać różnymi sposobami. Nałożona np. przy końcach drutu rurka Geisslera będzie świecić, gdyż końce są węzłami dla prądu, będzie tam największe nagromadzenie elektryczności, największe zmiany potencyału. W jakiemś miejscu dowolnem można nałożyć drucik poprzeczny. Jeżeli go nałożymy przypadkowo w miejscu węzłowem dla potencyału, to drucik zjawiska nie zmieni, gdyż niema dążności do wyrównania prądu. Jeżeli jednak nałożymy drucik na takie miejsce, gdzie występują maksymalne różnice potencyału, powstaje prąd, który uśmierza całe zjawisko i rurka przestaje świecić. Przesuwając to połączenie wzdłuż drutów, można znaleźć miejsca węzłowe, które odpowiadają odstępowi $\frac{\lambda}{2}$, a tak eksperymentalnie da się zmierzyć długość fali stojącej.

jeżeli znamy prócz tego okres drgań wibratora, mamy dane, by obliczyć prędkość rozchodzenia się fali po drucie $c = \frac{\lambda}{\tau}$. Stwierdzono, że fala elektryczna rozchodzi się wzdłuż drutów z tą samą prędkością, co w środku zewnętrznym. Takie doświadczenia mogą zatem pośrednio służyć do tego, żeby obliczyć stałą dielektryczną.

Należy jeszcze wspomnieć o jednem zjawisku, które było długo niezrozumiałe. Tem jest to t.zw. wielokrotna rezonancya (Multiple Resonanz). Występuje wtedy, jeżeli w poprzedniem doświadczeniu używa się rezonatorów do wykazania fal. Jeżeli umieszczamy rezonator w płaszczyźnie przechodzącej przez druty, (fig. 46) powstaje w nim siła indukowana i w razie istnienia rezonancyi przeskakują iskry. Badania na

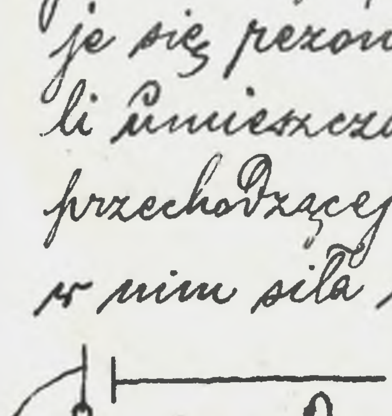


fig. 46.

tem polu przeprowadzili Sarasin & De la Rive. Używali oni różnych rezonatorów i różnych wibratorów. Można było przypuścić, że znajdą się pewne miejsca węzłowe i pewne maxima, zależne od okresu drgań wibratora, a same rezonatory będą odgrywały podrzędną rolę. Tymczasem pokazało się, że każdy rezonator odpowiadał na fale elektryczne, niezależnie od tego, czy był duży, czy mały i że długość λ stosowała się nie do okresu wibratora, ale do okresu rezonatora. Zdawało się, że to zjawisko jest wprost przeciwne teoryi wzbudzania fal. Tłumaczenie tego faktu podał jednak Poincaré dowodząc, że rezonancya zależy od stopnia uśmierzania się fal elektromagnetycznych wzbudzonych przez wibrator. Uśmierzają się wskutek ciepła Joula fale użyte do tworzenia iskier. Na miejsce sinusoidy wchodzi krzywa o amplitudach szybko

zanikających (fig. 47), $V = e^{-\delta t} \sin \alpha t$, dająca się rozwinąć w szereg Fouriera

$$A_1 \sin \alpha t + A_2 \sin 2\alpha t + \ldots\ldots +$$
$$B_0 + B_1 \cos \alpha t + B_2 \cos 2\alpha t + \ldots\ldots,$$

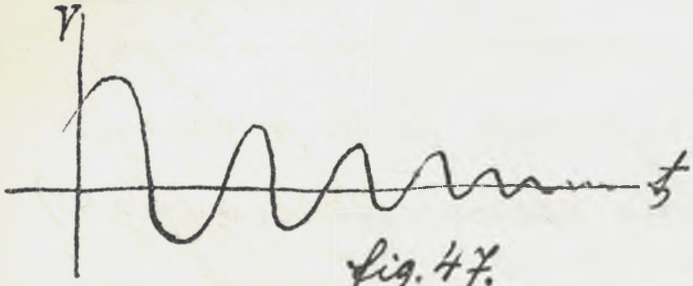


fig. 47.

który daje szereg fal elektrycznych o różnych okresach i zjawisko nie jest harmoniczne, ale złożone z szeregu fal elementarnych. Rezonator wybiera z pomiędzy nich te, które odpowiadają jego drganiom własnym i te fale wzmacnia. Dlatego też w drutach powstają fale, które odpowiadają okresowi rezonatora. Jeżeli zaś uśmierzanie jest słabe, to niema zjawiska rezonancyi wielokrotnej. Na tych doświadczeniach polega jeden ze sposobów mierzenia prędkości fal elektrycznych. Jedną z myśli charakterystycznych teoryi Maxwella jest to, że przyjmuje

siły działające tylko z punktu na punkt przylegający, a odrzuca działanie na odległość, co się wyraża tem, że równania jego są różniczkowe. Odpowiednio do tego starał się też znaleźć napięcia w eterze, powodujące siły ponderomotoryczne. Jak w teoryi sprężystości na kostkę elementarną (fig. 48)

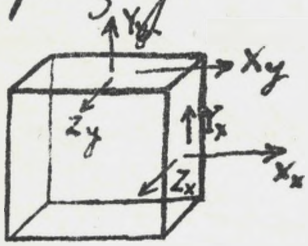


fig. 48.

działa 9 sił składowych; na każdą powierzchnię jedna prostopadła i dwie styczne. Jeżeli ma istnieć równowaga w każdym elemencie objętości, to musi być:

$$\left.\begin{array}{l} X_y = Y_x \\ X_z = Z_x \\ Y_z = Z_y \end{array}\right\}$$

Z rozważania kostki elementarnej wynikają równania ruchu. Siła w kierunku osi x, która powoduje ruch, jest — gdy X_{zw} oznacza składową siły zewnętrznej:

$$X_{zw} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = \rho_w \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Maxwell wykazuje, że można zastąpić siły elektromagnetyczne i elektrostatyczne, dobierając stosowne napięcia eteru. Zrobimy to w specyalnym wypadku. Wyobrażamy sobie, że mamy pole elektrostatyczne. Wtedy gęstość rzeczywista

$$\varrho_w = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}(KX)+\frac{\partial}{\partial y}(KY)+\frac{\partial}{\partial z}(KZ)\right] = \frac{K}{4\pi}\nabla^2 \mathfrak{U},$$

a siła składowa w kierunku x wywierana przez to pole na jednostkę masy jest

$$X\varrho_w = -\frac{K}{4\pi}X\left[\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right]$$

Tę siłę zewnętrzną elektrostatyczną mamy zastąpić przez napięcie eteru, pamiętając, że przyjęliśmy stan równowagi, czyli $\varrho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$.

$$X\varrho_w = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}X_y - \frac{\partial}{\partial z}X_z$$

Przyczem połóżmy

$$X_x = \frac{K}{8\pi}\left(X^2 - Y^2 - Z^2\right)$$

$$X_y = \frac{KXY}{4\pi}$$

$$X_z = \frac{KXZ}{4\pi}$$

bo wtedy rzeczywiście jest spełnione identycznie, jak to się okazuje po wstawieniu:

$$X_{\varrho w} = -\frac{k}{8\pi}\left(2X\frac{\partial X}{\partial x} - 2Y\frac{\partial Y}{\partial x} - 2Z\frac{\partial Z}{\partial x} + 2X\frac{\partial Y}{\partial y} + 2Y\frac{\partial X}{\partial y} + 2Z\frac{\partial X}{\partial z} + 2X\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

W wypadku elektrostatyki istnieje potencyał, a warunkiem na to jest, by

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y},$$ wobec tego

zostaje

$$X_{\varrho w} = \frac{k}{4\pi} X\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right\}$$

Analogicznie dla innych osi, tak, iż otrzymamy napięcia

$$X_x = \frac{k}{8\pi}\left(X^2 - Y^2 - Z^2\right) \qquad X_y = \frac{kXY}{4\pi} = Y_x$$

$$Y_y = \frac{k}{8\pi}\left(Y^2 - X^2 - Z^2\right) \qquad X_z = \frac{kXZ}{4\pi} = Z_x$$

$$Z_z = \frac{k}{8\pi}\left(Z^2 - X^2 - Y^2\right) \qquad Y_z = \frac{kYZ}{4\pi} = Z_y$$

To jest system napięć w eterze, który to system zastępuje nam siły elektrostatyczne, w polu działające. W podobny sposób można

zastąpić siły magnetyczne. W polu elektromagnetycznem istnieje suma napięć obu rodzajów:

$$X_x = \frac{k}{8\pi}\left(X^2 - Y^2 - Z^2\right) + \frac{\mu}{8\pi}\left(L^2 - M^2 - N^2\right) \text{ i t.d.}$$

By określić znaczenie tych wyrażeń, wyobraźmy sobie linie sił w polu elektromagnetycznem (fig. 49). Widzimy, że w części równoległej do osi x-ów istnieje tylko siła wzdłuż osi x skierowana, a składowe prostopadłe są równe zeru. Istnieje więc

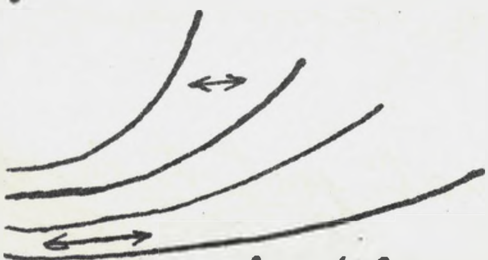


fig. 49.

napięcie ciągnące. W takich zaś miejscach, gdzie siły są prostopadłe do osi x i z, mamy tylko składową w kierunku osi Y, a ciągnienie w kierunku osi x jest proporcyonalne do Y^2 ze znakiem przeciwnym; działa zatem siła rozpierająca.

Ta sama interpretacya stosuje się do jakiego-kolwiek miejsca linii sił; zawsze te linie starają się kurczyć wzdłuż i rozpierać się wszerz. Działanie napięć w eterze jest ana-logiczne do działania napięć w mięśniach. Cały stan pola elektromagnetycznego można sobie wyobrazić za pomocą tych linii sił, wzdłuż których istnieje dążność do kurcze-nia się wraz z dążnością rozszerzania się wszerz.

To, cośmy dotąd poznali jest tylko szki-cem teoryi napięć w eterze. Dowód jej prze-prowadza się w sposób dość zawiły, trans-formując wyrażenie na energię W istnie-jącą przy napięciach. Za przykład niech służą siły działające na okładki konden-satora (fig. 50), zastą-pmy je przez nitki

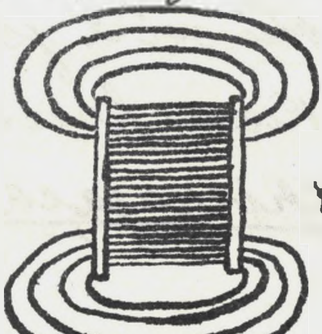


fig. 50.

kauczukowe kurczące się, to widzimy odrazu ogromną przewagę tych, które starają się zbliżyć płyty ku sobie.

Podobnie, jeżeli w polu jednostajnem jest umieszczona kula z materyału przewodzącego (fig. 51.), wystąpią napięcia kurczące, lecz siła wypadkowa jest zerem, bo jest tyle ich z jednej strony, co z drugiej.

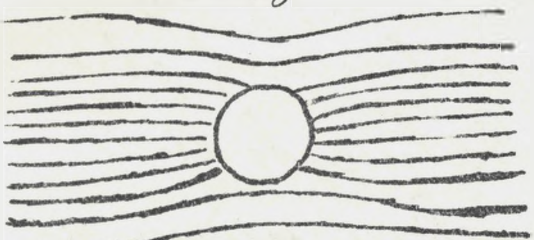


fig. 51.

Gdy kuli nadajemy jakiś ładunek dodatni, wtedy linie sił się deformują; przeważa siła ciągnąca ze strony linii sił ujemnych. Kula doznaje wtedy odpychania od płyty +. Gdy mamy dwie masy, dodatnią i ujemną, wtedy siła między niemi

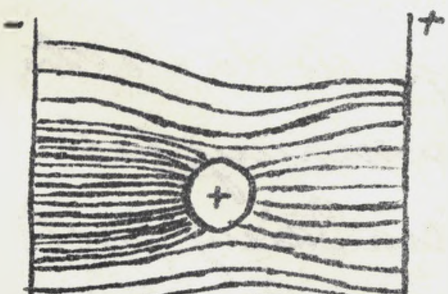


fig. 52.

jest bardzo wielka, a zewnątrz coraz mniejsza.

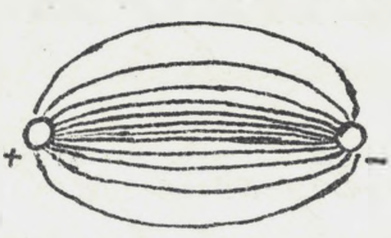


fig. 53.

Nitki kauczukowe kurcząc się, zbliżają te masy do siebie (fig. 53.)
Jeżeli natomiast obie masy mają ładunki dodatnie, to linie sił między niemi się zaginają; przeważają napięcia odpychające. (fig. 54).

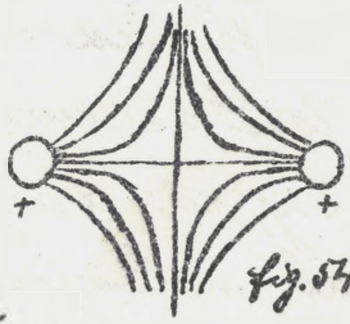


fig. 54.

Takie samo rozważanie stosuje się do elektromagnetyzmu. Powiedzmy, że mamy pole magnetyczne; w to pole wkładamy pręt prostopadły do płaszczyzny rysunku (fig. 55.), przez który przepuszczamy prąd elektryczny. Ten prąd powoduje swoje własne linie sił, któ-

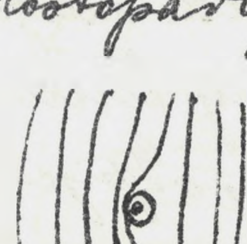


fig. 55

re się superponują ponad istniejące. Gdy na miejsce linii sił wprowadzamy napięcia, widzimy, że powstaje siła prostopadła do kierunku prądu i siły magnetycznej.

Stąd można wyprowadzić jeden ciekawy wniosek, w razie jeżeli istnieje fala elektromagnetyczna. Wyobraźmy sobie, że istnieje fala postępowa

$$Y = a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right), \text{ i że } x = z = 0.$$

Widzieliśmy, że taka fala elektryczna wymaga współistnienia fali magnetycznej prostopadłej do kierunku rozchodzenia się i do fali elektrycznej. Więc $L = M = 0$, a $N = \frac{a}{c} \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right)$. Równania na Y i N przedstawiają falę elektromagnetyczną w kierunku osi x, przyczem $c = \frac{1}{\sqrt{k\mu}}$; jeżeli $\mu = 1$, to $c = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Obliczmy siłę elektromagnetyczną, która wzbudza taką falę

$$X_x = -\frac{k}{8\pi} a^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{a^2 k}{8\pi} \sin^2 \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right) = -Y^2 \frac{k}{4\pi}$$

$$Y_y = \frac{k}{8\pi} - \frac{1}{8\pi} N^2 = 0$$

$$Z_z = -\frac{k}{8\pi} Y^2 + \frac{1}{8\pi} N^2 = 0$$

Wszystkie siły styczne także znikają.
Napięcia wewnątrz eteru redukują się do jednego ciśnienia w kierunku osi x. A zatem: fala elektromagnetyczna w kierunku osi x wywiera ciśnienie w kierunku tej osi. Wielkość jego łatwo się oblicza. Zmienia się ono peryodycznie z czasem, a nas interesuje przeciętna jego wartość:

$$\overline{X}_x = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau X_x\,dt = -\frac{k}{8\pi}\frac{a^2}{\tau}\int_0^t \sin^2 \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Pomnożymy i podzielimy to przez $\frac{2\pi}{\tau}$.

$$\overline{X}_x = -\frac{\frac{k}{4\pi}\frac{a^2}{\tau}}{\frac{2\pi}{\tau}} \int_{\frac{2\pi}{\tau}\frac{x}{c}}^{\frac{2\pi}{\tau}\frac{x}{c}+2\pi} \sin^2 \underbrace{\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right)}_{\varphi} \underbrace{dt\,\frac{2\pi}{\tau}}_{d\varphi} = \frac{-\frac{k}{4\pi}\cdot\frac{a^2}{\tau}}{\frac{2\pi}{\tau}}\cdot\pi$$

$$= -\frac{k a^2}{8\pi}$$

Widzimy zatem, że ciśnienie będzie pro-

porcyonalne do kwadratu amplitudy drgania, czyli do natężenia tego ruchu falowego, który upada na daną płaszczyznę. – Można teraz łatwo udowodnić, że to samo wyrażenie przedstawia ilość energii elektromagnetycznej, zawartej w jednostce objętości

$$\frac{K}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)$$

W wypadku zwierciadła trzeba zważyć, że następuje odbicie fali, więc wtedy natężenie jest dwa razy tak duże.
Jeżeli to jest ściana częściowo absorbująca promienie, trzeba brać w rachubę także promienie odbite. Tak samo wtedy, gdy światło upada pod kątem ukośnym i rozdziela się na składową prostopadłą i równoległą.

Wielkości te są bardzo małe. Chodzi np. o ciśnienie wywierane przez promie,

nie słoneczne, wpadające prostopadle na zwierciadło. Energia promieniowania słonecznego wynosi 2 kal. na cm^2 podczas jednej minuty, więc w sekundzie $2/60$, a na 1 cm^3 przypada:

$$\frac{2}{60.3.10^{10}} \text{ (w kaloryach)}$$

$$= \frac{2.4{\cdot}2.10^7}{60.3.10^{10}} \text{ w cgs} \neq \frac{1}{2}.10^{-4},$$

a z powodu odbicia od zwierciadła dwa razy tyle: jest to ciśnienie jednej dyny, czyli ciężaru jednego mg na m^2. - Mimo iż zdawałoby się, że tak małe siły nie dadzą się zmierzyć empirycznie, Lebedier, Nickols, Hull wykonali w ostatnich latach doświadczenia, które stwierdziły istnienie ciśnienia światła i sprawdziły zgodność liczbową, nadto Poynting wykazał istnienie składowych stycznych, a to też w wypadkach, gdzie istnieje załamanie.

Wyniki te posiadają wielkie znaczenie, gdyż cała teorya elektromagnetyczna promieniowania jest wybudowana pod założeniem istnienia siły ciśnienia. Także w pewnych zjawiskach kosmicznych zdaje się ciśnienie światła wpływ wywierać. Już Keppler twierdził, że kształt ogonów komet da się wytłumaczyć przez siłę odpychającą światła, a dokładne obliczenia w tym względzie wykonał Schwarzschild, uwzględniając nie tylko odbicie, ale i zjawisko uginania, które musi nastąpić, jeżeli cząstka jest bardzo mała. Jest przytem rzeczą oczywistą, że siła ta będzie odgrywać tem większą rolę, im mniejsza jest cząstka, a to dlatego, że jest ona proporcyonalna do przekroju cząstki, więc do r^2, podczas gdy grawitacya jest proporcyonalna do r^3. Zatem stosunek obu sił jest $\frac{1}{r}$.

Nowe teorye el. i magn. Artk. XIX.

Póki cząstki są małe przeważa wpływ odpychania światła. Schwarzschild wykazał, że dla cząstek wielkości fal świetlnych jest on 18 razy większy, niż wpływ grawitacyi. Tem tłumaczy się zjawisko tworzenia się ogonów komet i ich kształt.

Co do istoty odkształceń w eterze wygłosił Maxwell szereg hipotez. Pierwotnie założył, że linię siły można sobie wyobrazić jako wir w eterze, albowiem w cieczy wirującej siła odśrodkowa działa rozpychająco i poszerzająco w kierunku poprzecznym i kurcząco w podłużnym. Teoryę tę rozwinął w rozprawie p.t. „Faradays Kraftlinien”; później stopniowo emancypował się od tego specyalnego założenia i traktował rzecz ogólniej, przyjmując, że w polu magnetycznem istnieją jakieś ruchy ukryte eteru. Związana z tem jest teorya ruchów

cyklicznych cząstek, tj. takich ruchów, w których pojedynczych poruszających się cząstek nie widzimy, a obserwować możemy tylko wypadkowe skutki ruchów tych cząstek np. wzajemna indukcya dwóch prądów jest przykładem bicyklu. (Bardziej szczegółowo u Boltzmanna w wykładach o Maxwellu). Maxwell starał się do uzmysłowienia teoryi konstruować obrazy mechaniczne. Przyjął np. budowę eteru tego rodzaju, że między tworami sześciokątnymi krążą kuleczki z tarciem, które reprezentują elektrony. Wywołują one ruch utworów sześciokątnych, odpowiadający siłom magnetycznym, podczas, gdy ruch postępowy kuleczek przedstawia prąd, lub siłę elektryczną. Chodziło

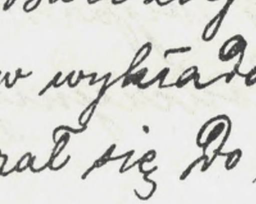


fig. 56.

Maxwellowi szczypiście tylko o to, by wykazać, że można siłę pola elektromagnetycznego wytłumaczyć jako efekt ukrytych ruchów i uważać elektromagnetyzm, jako specyalny przypadek mechaniki. Teraz zapatrujemy się na rzecz przeciwnie; uważamy mechanikę za specyalny wypadek elektromagnetyzmu. Na tem kończymy właściwą teoryę Maxwella. —

Teorya elektronowa.

Podstawy doświadczalne.

Teorya Maxwella i Hertza posiada jeden brak zasadniczy, a mianowicie, że się odnosi tylko do ciał nieruchomych; powstaje zatem kwestya, jak ją uogólnić dla ciał poruszających się. W tym celu Hertz założył, że eter porusza się wraz z ciałem i na tej podstawie doszedł do równań uogólnionych, które można interpretować, jako wyraz szeregu

częściowo jeszcze dotychczas nieznanych sił elektromagnetycznych. Według Lorentza przeciwnie, wyobrażamy sobie, że eter jest nieruchomy i że materya przez eter się przesuwa nie wprowadzając go w ruch. Maxwell sam co do tego nie miał wyrobionego zdania. Przypuszczał tylko istnienie prądów konwekcyjnych, t. zn., że ruch postępowy ciała naładowanego jest równoważny z prądem elektrycznym; było to jednak przypuszczenie zupełnie hypotetyczne, a pierwszy starał się je sprawdzić doświadczalnie Rowland 1876, używając płyty metalowej, zawartej między okładkami kondenzatora, który ładował i wprawiał w szybki ruch obrotowy. Płyta działała na igłę magnetyczną umieszczoną w bliskości swej osi. Te pierwsze doświadczenia nie były dość ścisłe, tak, że podnosiły się głosy przeciwko

ich wynikom i wskutek tego Rowland po„
wtórzył je i w roku 1889 podał liczbowe da„
ne zgodne z teoryą. Następnie Cremieu
wykonując podobne doświadczenie w r. 1900
otrzymał wyniki negatywne; lecz w roku 1901
Amerykanin Pender potwierdził rezulta„
ty Rowlanda, a Cremieu po raz drugi otrzy„
mał wyniki negatywne. Rozstrzygnięcie tego
sporu bardzo ważne dla teoryi elektronowej,
która uznaje tylko prądy konwekcyjne,
nastąpiło w ten sposób, że Pender i Cremieu
razem przeprowadzili badania i pokaza„
ło się ostatecznie w roku 1903, że przyczy„
ną, dla której Cremieu otrzymał wynik
negatywny było to, że pokrył płyty konden„
zatora warstwą lakieru, na której, jako izo„
lującej osadziły się prawdopodobnie ujemne
ładunki, oddziaływające w nieznany bliżej
sposób. Odkrycie Rowlanda udało się potwier„

dzić także inną metodą. Fizyk Wassilenko użył płyty kołowej (a b) fig. 57, umieszczonej w puszce między płytami kondenzatora (cd). Płytę tę wprawiał w ruch wirowy, a ładunki elektryczne jej poddawał szybkim peryodycznym zmianom zapomocą induktora Rhümkorffa. Wtedy płyta poruszająca się powinna dać ten sam efekt, co

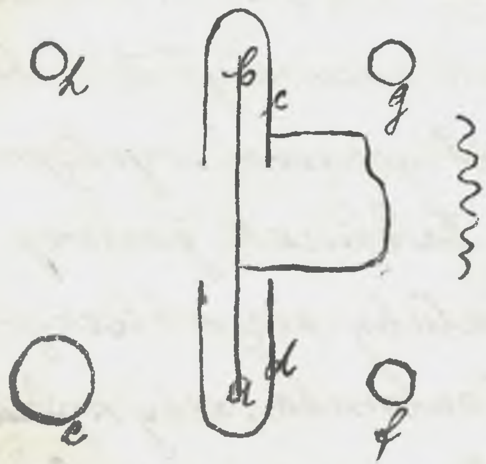


fig. 57.

szybko zmienny prąd kołowy i w zwojach zewnętrznych (e, f, g, h) powinny powstawać prądy indukowane. Istotnie prądy takie powstają. Obecnie uważamy istnienie prądów konwekcyjnych za fakt zupełnie stwierdzony. Prądy konwekcyjne są podstawą, na której opiera się teorya elektronowa. Istnienia ich

domaga się też teorya dyssocyacyi elektromagnetycznej, wyobrażamy sobie bowiem, że prądy w elektrolitach polegają na przesunięciu się jonów.

Pomysł elektronów nasunął się po raz pierwszy przy elektrolizie, która, jak zauważył Helmholtz, tak się odbywa, jakby elektryczność występowała w postaci atomów jako ładunek jonowy. Masa takich ładunków dałaby się obliczyć. Potrzeba ładunku 96513 Coulomba, żeby wydzielić równoważnik elektrolityczny pierwiastka. (Równoważnik elektrolityczny jest to iloraz z ciężaru atomowego przez wartościowość). Tak np. równoważnik wodoru jest $\frac{1{\cdot}01}{1} = 1{\cdot}01$, równoważnik miedzi $\frac{64}{2} = 32$ gramów. W jednostkach elektromagnetycznych 9651·3 (cm) odpowiada 1·01 gramowi H. Objętość grama wodoru wynosi, gdy gęstość $\varrho = 0{\cdot}0000\,89\,873$, $v = \frac{1{\cdot}01}{0{\cdot}0000\,89873} = 10^4 cm^3$. Z teoryi kinetycznej gazów wiemy,

że w 1 cm^3 zawiera się 4.10^{19} drobin, a że drobina zawiera dwa atomy, będzie 2 razy tyle atomów, $2.4.10^4.10^{19}$ atomów na jeden gram. Na jeden atom przypada więc ładunek

$$e = \frac{\overset{10^4}{9651 \cdot 3}}{2.4.10^4.10^{19}} (em) = \frac{3.10^4.10^{10}}{8.10^4.10^{19}} = 4.10^{-10} (est)$$

Wielkość ta nie jest dokładna, bo liczba drobin w 1 cm^3 nie jest całkiem dokładna, ale rząd jej jest pewny. – Obecnie mamy już bowiem szereg metod określenia e ładunku elektronowego, a obliczenia wahają się między $3.10^{-10} – 4 \cdot 69.10^{-10}$.

Tak się przedstawia teorya z punktu widzenia elektrolizy. Myśl Helmholtza nie znalazła uznania, bo właśnie wtedy Ostwald i jego zwolennicy zupełnie zarzucili teoryę drobin i atomów. Rzecz tę postawiły w innym świetle dopiero badania nad promieniami katodowymi.

Nowe teorye el. i magn. Art. XX.

Badania nad promieniami katodowymi.

Wyobraźmy sobie rurkę Geisslerowską zaopatrzoną dwiema elektrodami. Niech ona będzie początkowo napełniona powietrzem lub innym gazem o ciśnieniu normalnem, które potem wypompujemy i wywołujemy takie napięcie, że następuje rozbrojenie, zrazu w kształcie iskry, potem jako pas świetlny.

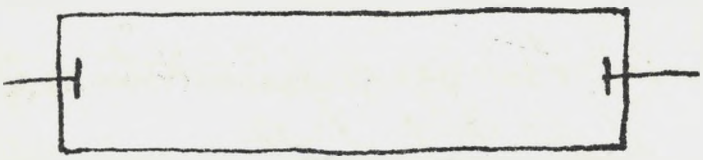


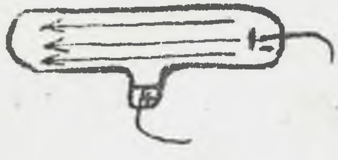
fig. 58.

Koło anody powstaje światło dodatnie, różowe, następnie przychodzi tzw. ciemna przestrzeń Faradaya, w bliskości katody światło niebieskawe ujemne (negatives Glimmlicht), a tuż koło katody ciemna przestrzeń Crookesa, sama katoda jest pokryta świa-

łtem żółtem. Gdy ciśnienie dalej spada, poszerza się światło negatywne, a pozytywne znika, równocześnie zmniejsza się natężenie światła i opór rurki maleje; potem zaczyna znowu rosnąć. Z czasem negatywne światło wypełnia całą rurkę, dodatnie znika, a tam gdzie ujemne dotyka rurki, występuje fluorescencya w tej chwili promienie katodowe sięgają przez całą rurkę. W miejscach fluoryzujących powstają promienia Röntgena. Promienie te badał przedewszystkiem Lenard jeszcze przed odkryciami Röntgena, stąd nazwa promieni katodowych Lenarda.

Własności promieni katodowych były częściowo znane już Crookesowi; on nazywał je czwartym stanem skupienia, stanem promienistym materyi. Lecz Crookes nie znalazł uznania. Panowało wtedy

mniemanie podtrzymywane przez Hertza, że są to fale podłużne eteru. Ten pogląd został zarzucony dopiero, gdy Sir J. Thomson zaczął badać promienie katodowe i wyka" zał, że można nowe zjawiska wytłumaczyć w sposób zupełnie zadowalniający pod przy" jęciem, że promienie transportują ładun" ki ujemne. Lenard i Hertz twierdzili, że promienie katodowe są zupełnie niezale" żne od prądu, gdyż rozchodzą się prosto" linijnie, prostopadle do powierzchni kato" dy, a nie od katody ku anodzie. (fig. 59)



Thomson jednak wypo" wiada mniemanie, że cząstki ujemne są sku" tek spadu potencyału wyrzucane z taką prędkością, że anoda jest za słaba, by je przyciągnąć. Aby rozstrzygnąć pytanie, czy promienie katodowe transformują ładun"

-ki, czy nie, Perrin przepuszczał przez ekran (e) wiązkę promieni katodowych, które padały na konduktor (k)

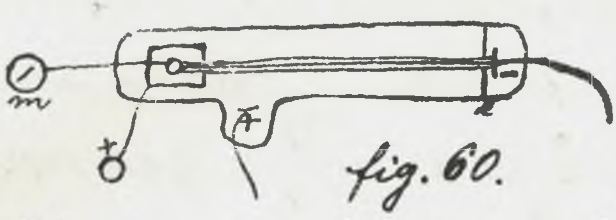


fig. 60.

otoczony zasłoną izolującą (i) i połączony z elektrometrem (m), wskutek tego występował na elektrometrze ładunek ujemny, który stopniowo wzrastał, a zatem na konduktor była doprowadzana elektryczność ujemna. Jeżeli promienie katodowe przenoszą ładunki elektryczne, to muszą doznawać odchylenia w polu elektromagnetycznem. Przypuszczał to już Crookes, lecz wpływu tego nie potrafił wykazać, bo jest on bardzo słaby. Wykrycie jego udało się dopiero Sir J. Thomsonowi w ten sposób, że wiązkę promieni katodowych przepuszczanych przez ekran, wprowadzał między płyt

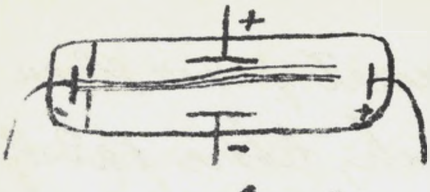


fig. 61.

kondenzatora, gdzie od-chylały się ku płycie do-datniej (fig 61). Trudność doświadczenia polega na tem, iż rurka musi być dokładnie wypróżniona, gdyż gaz roz-rzedzony jako przewodnik neutralizuje pole płyt kondenzatora. – Włóżmy oś x-ów w kierunek promienia, oś y-ów w kierunek pola.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0\,,\quad \frac{dx}{dt}=\text{const}=v$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=e\underset{\substack{\downarrow\\ \text{natężenie}\\ \text{pola}}}{Y}\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{e}{m}Y$$

$\frac{dy}{dt}=\frac{e}{m}Yt$ – cząstka zakreśla parabolę. Liczymy czas od chwili, gdy promień wcho-dzi między płyty kondenzatora, stąd po-rusza się z prędkością $\frac{dx}{dt}=v$, $t=\frac{x}{v}$, więc

$$\frac{dy}{dt}=\frac{e}{m}Y\frac{x}{v}.$$

$$y=\frac{e}{m}Y\frac{t^2}{2}=\frac{e}{m}Y\frac{x^2}{2v^2}$$

Rozmiary tej paraboli zależą od $\frac{e}{m}$ i v, zatem chodzi o to, czy potrafimy te dwa składniki od- dzielnie obliczyć. Według tego, cośmy powiedzie- li o prądzie konwekcyjnym, ruch elektronów jest równoważny z prądem elektrycznym codo sił elektro-magnetycznych, które wywiera i którym podlega. Gdy ilość cząstek, wyrzuca- nych w czasie jednej sekundy jest n, to natę- żenie prądu $i = ne$. Wytwórzmy sobie pole ma- gnetyczne prostopadłe do promieni (fig. 62) i do przekroju widocznego na rysunku, tak by linie sił padały z przodu na płaszczyznę figury, wtedy siła działająca w polu na 1 cm. długości

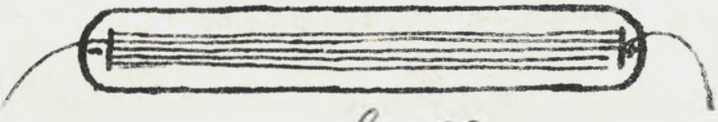


fig. 62.

promienia będzie $F = iH = neH$. By obliczyć siłę, działającą na 1 elektron, trzeba wiedzieć, ile elektronów przypada na 1 cm długości. Liczba elektronów wypylanych na sekundę

jest n, będą one rozłożone na drodze o długości v; na 1 cm przypada zatem $\frac{n}{v} = N$. A siła, która działa na 1 elektron jest $\frac{F}{N} = \frac{n e H}{\frac{n}{v}} = v e H$. O kierunku wychylenia rozstrzyga reguła Fleminga.

$$\frac{F}{N} = v e H = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

stąd $$w_1 = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{e}{m} v H.$$

Równanie to będzie sprawdzone tylko dopóki kierunek promieni katodowych jest poziomy i póki linie siły magnetycznej są zawsze prostopadłe do elementu drogi promienia katodowego. Prędkość promienia katodowego w kierunku swego rozchodzenia się nie zostaje zmieniona, bo w kierunku stycznym żadna składowa siły nie przypada; każda cząstka doznaje przyspieszenia tylko w kierunku prostopadłym do drogi, które jest stałe o ile H, v i m są stałe. Stąd wynika, że promień katodowy zakreśli drogę kołową. Obliczymy

jego promień krzywizny.

$$m w_1 = e v H = \frac{m v^2}{R} \text{ (sile odśrodkowej)}$$

$$R = \frac{m}{e} \frac{v}{H}$$

Jeżeli się rozważy promień katodowy tylko w tej części, gdzie jest prawie równoległy do osi X, to

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e}{m} v H = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot v^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e}{m} \frac{H}{v} = \frac{1}{R}$$

W polu magnetycznem promień skrzywia się tak, że tworzy łuk koła, podczas, gdy w polu elektrostatycznem tworzy parabolę. Ale w pierwszem przybliżeniu łuk odchylenia jest mały, tak, że parabolę można uważać za koło o promieniu

$$R' = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\frac{d^2y}{dt^2}} = \frac{v^2}{\frac{d^2y}{dt^2}} = v^2 \frac{m}{e} \cdot \frac{1}{Y},$$

analogicznie do wyrażenia na R, tylko, że zamiast v, jak dla R, występuje v^2.

Nowe teorye el. i magn. Art. XXI.

Lecz istnieje tu zasadnicza różnica, że w polu elektrycznem promień odchyla się w kierunku siły, a w polu magnetycznem prostopadle do kierunku siły.

Wykonując oba doświadczenia z tym samym promieniem ma się sposób do obliczenia v i $\frac{m}{e}$ z osobna: $\frac{R'}{R} = v\frac{H}{Y}$.

Prędkość v zależy od stopnia rozrzedzenia gazu i od potencyału, którego używamy. Energia kinetyczna cząstek pochodzi stąd, że elektrony w blizkości katody się znajdujące zostają przez nią odpychane, a zatem od pracy, którą wykonuje katoda, czyli od energii elektrostatycznej. Jeżeli założymy, że cała energia elektrostatyczna zamienia się w kinetyczną, możemy energię kinetyczną obliczyć.

$$\frac{mv^2}{2} = eV$$

(V- potencyał rozbrojenia, Entladungspo-tential.)

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} V}$$

a kombinując z wyrażeniem dla promienia krzywizny:

$$R v^2 = \frac{2Vv}{H}$$

$$R v = \frac{2V}{H}$$

Znając promień krzywizny promienia katodowego i potencyał rozbrojenia, można obliczyć prędkość cząstek katodowych.

Jeszcze inna metoda opiera się na zasadzie energii. Promień katodowy wpadając na powierzchnię szkła rozgrzewa je, gdyż energia jego zmienia się w ciepło. Podczas jednej sekundy jest wysyłanych n cząstek, więc ilość ciepła wywiązanego $Q = \frac{n m v^2}{2}$, a że prąd transportowany przez te cząstki $i = ne$, stąd $\frac{Q}{i} = \frac{m}{e} \cdot \frac{v^2}{2}$. Jest to więc znowu relacya, gdzie występuje v i $\frac{m}{e}$.

Kombinując jakiebądź dwie z tych ob-

serwacyi, można otrzymać z osobna $\frac{m}{e}$ i v^2.
Sir J. Thomson mierzył potencyał rozbrojenia V, oraz odchylenie magnetyczne o promieniu R i znalazł, że liczba $\frac{m}{e}$ jest wielkością stałą, niezależną ani od rodzaju gazu ani od elektrod, ani od wielkości potencyału. Stąd wypływa ważna myśl teoryi elektronowej: elektrony są cząstkami wspólnemi, z których się składają drobiny wszystkich ciał. Z dalszych pomiarów otrzymał v mniejsze od prędkości światła i proporcyonalne do $\sqrt{V}$. W dokładniejszy sposób otrzymał Kaufmann $\frac{e}{m} = 1.865 \cdot 10^7$ (e w jednostkach (em) m - cgs). W elektrolizie otrzymano dla wodoru $\frac{e}{m} = \frac{96513 \, Coul}{1g} = 10^4$ - liczbę przeszło 2000 razy mniejszą. Wprawdzie e jest w obu przypadkach takie same, ale niezgodność ta według Thomsona pochodzi stąd, że masa m elektronu jest 2000 razy mniejsza niż jedne

atom; hypoteza jego później została stwier-
dzona bezpośrednimi pomiarami Kaufmanna
e. - Prędkość v zależy od potencyału rozbro-
jenia, który znów zawisł od stopnia rozrze-
dzenia gazu. Jest to zatem wielkość, co do
której à priori nic nie można powiedzieć,
bo zależy od warunków doświadczenia, ale
rząd jej można otrzymać

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} V}$$

1 volt = 10^8 jednostek bezwzgl., a z drugiej
strony jednostka elektromagnetyczna
jest 3.10^{10} większa, niż elektrostatyczna, więc
przyjmując $V = 10^4$ Voltów

$$v = \sqrt{2.1868.10^7.3.10^3.10^8 \text{Volt}.\frac{1}{3.10^3}} =$$

$$= \sqrt{4.10^{15}.10^4} = 6.10^9 = \frac{c}{5}$$

Dogodniejsze do badania są promienie β
(radyoaktywne), które składają się też z ujem-
nych cząstek, tylko, że nie wytwarza ich

pole elektryczne, ale inne z nieznanych powodów, zatem do obliczenia $\frac{e}{m}$ nie można używać metody, przy której występuje V, ale trzeba kombinować odchylenie magnetyczne i elektrostatyczne; przyczem tu jeszcze występuje komplikacya, że pojedyncze cząstki posiadają prędkości bardzo różne, wobec czego przy odchyleniu w polu elektrycznem lub magnetycznem promień zostaje rozciągnięty wachlarzowato.

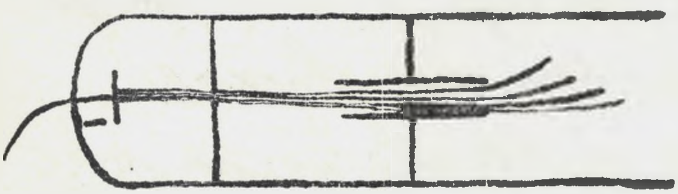


fig. 63.

Kaufmann zajmując się tymi promieniami kombinował odrazu pole magnetyczne i elektryczne. A ponieważ gdy oba pola mają ten sam kierunek, siła odchylająca jest prostopadła, otrzymujemy krzywe w płaszczyźnie yz (fig. 63). Do każdego punktu należy pewne odchylenie elektrostatyczne i magnetyczne. Stąd mo-

żna obliczyć promień krzywizny i dalej prędkość, która danemu punktowi odpowiada. I pokazało się, że $\frac{e}{m}$ nie jest stałe, że im większa jest prędkość, tem mniejsze $\frac{e}{m}$. Pozostaje to w zgodzie z teoryą elektronową, przyjmującą bardzo szybki ruch cząstek naładowanych.
Szybki ruch cząstek naładowanych powoduje zjawiska analogiczne do samoindukcyi, czyli wytwarza pewną bezwładność cząstek, tak, jakgdyby posiadały masę materyalną, a im większa prędkość, tem większa musi być pozorna masa, m. Lecz to zwiększenie się masy m uwydatnia się dopiero przy bardzo wielkich prędkościach, zbliżonych do prędkości światła; przy takich zaś, z jakiemi miał do czynienia Thomson, jeszcze nie występuje.

Wszystkie pomiary prędkości i masy elektronów pozostają ze sobą w zgodzie,

ale byłoby pożądanem, żeby te trochę dziwne rezultaty stwierdzić bezpośrednio inną drogą. Dlatego jest rzeczą ważną, że prędkość promieni katodowych można mierzyć doświadczalnie metodami, które wymyślili Wiechert i Des Coudres. Zasada tych metod jest analogiczna do użycia kółka zębatego, którem posługiwał się Fizeau przy mierzeniu prędkości światła. Niestety u promieni katodowych nie ma zjawiska regularnego odbicia, ale gdy promień katodowy padnie na jakąś powierzchnię, to we wszystkich kierunkach rozchodzą się od niej znowu promienie katodowe. Nazywamy to rozpraszającem odbiciem (Diffuse Reflexion). Prawdopodobnie nawet nie następuje tu odbicie, ale promienie katodowe wywołują znowu promienie katodowe, jak przy fluorescencyi. Teoretycznie można umieścić 2 koła na wspólnej osi, tak, że zębowi odpo-

wiała ząb; będzie istniała pewna taka prędkość obrotowa, że czas przejścia promienia między kołami będzie taki, jak czas przejścia od zęba do otworu. Jednak promienie katodowe zostają silnie absorbowane, nie można więc użyć dłuższych przestrzeni, niż ułamek metra. Dlatego wynaleziono inne sposoby przerywania promieni, powołując się na zjawiska odchylenia w polu elektromagnetycznem. Wyobraźmy sobie katodę w kształcie zwierciadła wklęsłego (a) (fig. 64). Promienie rozchodzą się prostopadle do powierzchni, przecinają się więc w jednym punkcie o, w którym umieszczamy ekran z małym otworem (e).

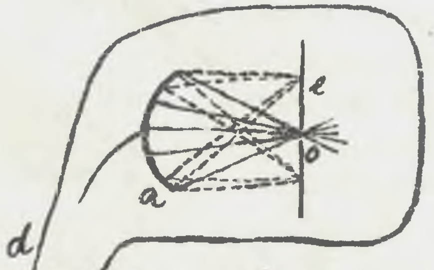


fig. 64.

Całość wprowadzamy w pole magnetyczne, utworzone przez prąd przemienny, prowadząc dokoła drut (d), którym

prąd krąży; gdy siła działa prostopadle do płaszczyzny figury, to odchylenie promienia katodowego następuje właśnie w tej płaszczyźnie, raz ku górze, raz ku dołowi, zależnie od kierunku prądu. Ekran można też tak umieścić, że promień przejdzie przez otwór tylko wtedy, gdy ma maksymalne wychylenie w jednym kierunku. W dalszym ciągu tej samej rurki (fig. 64a) znajduje się drugi ekran z otworem (f) za którym w przedłużeniu mieści się rurka (r), zakończona tafelką szklaną lub innem ciałem, które pod wpływem promieni katodowych fluoryzuje i tą część łączymy też przewodnikiem, przez który przepływa prąd przemienny. Promienie tylko wtedy przejdą przez oba otwory, gdy odchylenie jest zerowe, czyli gdy różnica fazy jest ćwierć

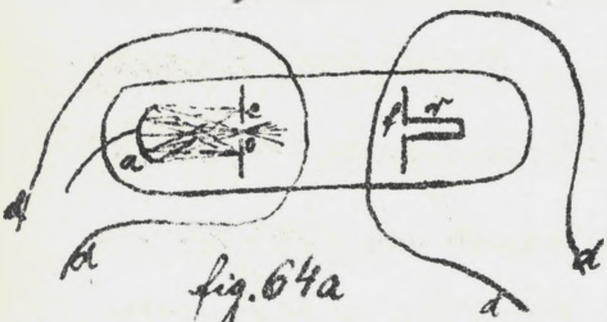


fig. 64a

drgania prądu przemiennego. — W celu osiągnię-cia znacznej częstości drgnień użyto prądów powsta-jących przy rozbrojeniach kondenzatora. Prze-wy promieni były przytem znacznie częstsze, niż by się to dało uzyskać przy pomocy ko-ła zębatego. Obserwując przechodzenie pro-mieni na podstawie wzbudzonej przez nie fluorescencyi można obliczyć prędkość roz-chodzenia się promieni. Znaleziono w ten sposób $v = \frac{c}{8} = 42.000$ km. na sekundę. — Dokła-dnie jest to ważne tylko dla użytej właśnie rurki Crookes'a, ale rząd wielkości zawsze jest zgodny.

Szereg wniosków dotyczy stosunku $\frac{e}{m}$. Dla masy cząstek poruszających się wynika $\frac{1}{2000}$ at. wodoru, w razie, gdy ładunek ~~(elektry-czny)~~ elektronu jest identyczny z ładun-kiem 1 jonu w elektrolizie. Przypuszczenie, bę-dące na razie hypotezą, sprawdził Sir J. Thomson

wykonując bezpośrednio pomiary. Do tego posłużyła mu własność pary wodnej, że przy ochłodzeniu powietrza nasyconego parą wodną powstaje zrazu przesycenie, a dopiero przy przekroczeniu pewnej granicy para się koncentruje. Odnośne doświadczenie urządza się w ten sposób, że ochłodzenie przeprowadza się drogą adiabatyczną, rozszerzając np. nagle objętość naczynia. Skroplenie się pary wodnej zostaje ułatwione, jeżeli w powietrzu znajdują się pyłki (sposobu tego użył Aitken do mierzenia ilości pyłków, których znalazł około 10.000 w 1 cm^3 powietrza), można jednak powietrze od nich oczyścić, wywołując kondensacyę częściową, przez co cząsteczki pary osiądą na pyłkach i opadną wraz z nimi. Gdy tak oczyszczone powietrze nasycimy znów parą wodną i powtórzymy doświadczenie,

to pokazuje się, że potrzeba rozprężenia adiabatycznego takiego, by $\frac{v}{v_0}$ było większe od 1·38, żeby wogóle kondenzacya nastąpiła. Jeżeli jednak wewnątrz znajdą się jakieś jony (jonizację wywołujemy promieniami katodowymi, radu) szczególnie jony ujemne, to wystarcza już zmiana objętości $\frac{v}{v_0}>1·25$, by na jonach kondenzowała się para wodna, przyczem najpierw kondenzuje się tylko na jonach ujemnych, a dopiero przy $\frac{v}{v_0}>1·31$ także na dodatnich. Można to skonstatować, umieszczając wewnątrz płytę kondenzatora i ładując ją silnie ujemnie; wtedy opadają wszystkie jony dodatnie tak, że powietrze zawiera tylko jony ujemne. Wystarcza wtedy $\frac{v}{v_0}>$ 1·25; gdy się zaś płytę kondenzatora naładuje dodatnio, przyciągnie ona wszystkie jony ujemne, w powietrzu zo-

stają dodatnie; potrzeba wtedy rozprężenia w stosunku $\frac{v}{v_0} > 1\cdot31$. Obserwacye te pochodzą od C. T. R. Wilson'a, a Thomson tłumaczył je w związku ze zjawiskami włoskowatości. Na tej podstawie wykonał Thomson następnie pomiary ładunku „e" w następujący sposób: Używał powietrza nasyconego wilgocią, w którem wytworzył nagle przesycenie odpowiadające $1\cdot25 < \frac{v}{v_0} < 1\cdot31$; koło każdego jonu ujemnego wytworzyła się jedna kropla; ta mgła opada pod wpływem ciężkości z prędkością dającą się obliczyć według prawa Stokes'a. Kula o promieniu a, poruszająca się w cieczy lub w gazie lepkim z jednostajną prędkością u doznaje oporu $6\pi\mu a u$, oporu proporcyonalnego do pierwszej potęgi prędkości i średnicy. Pod wpływem ciężkości kula odbywa ruch

zbliżony do ruchu jednostajnego. Opór w każdej chwili równoważy się z ciężkością.

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \varrho g = 6\pi \mu a u, \text{ stąd } u = \frac{2}{9}\frac{a^2 \varrho g}{\mu}.$$

μ współczynnik lepkości powietrza jest znany, ϱ w tym wypadku $= 1$, g znane, mierząc więc prędkość, z którą mgła opada, mamy sposób mierzenia rozmiarów kuleczek „a", a znając ich ilość n, znamy prąd, który taka mgła transportuje; jest on proporcyonalny do ne. Z tego prądu i liczby n można liczbę e obliczyć. Pierwsza ta metoda jest mniej dokładna. Wykonując pomiar według drugiej, obserwujemy opadanie mgły w naczyniu, gdzie są umieszczone płyty kondenzatora (fig. 65). Jeżeli nie ma sił elektrycznych to $u = \frac{2}{9}\frac{a^2 \varrho g}{\mu}$; jeżeli przeciwdziała siła ele-

fig. 65.

ktryczna, to można ją tak dobrać, by równo-ważyła ciężkość i mgła nie opadała.

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \varrho g = e V \quad (V \text{ natężenie pola})$$

Mamy 2 równania, z których można wielkość e obliczyć; tym sposobem Thomson dostał $e = 3{\cdot}4 . 10^{-10}$ (e st), a H. H. Wilson $e = 3{\cdot}1 . 10^{-10}$ (e st), a Amerykanin Millikan $e = 4{\cdot}06 . 10^{-10}$ (e st). Na tę niezgodność składają się możliwe błędy doświadczenia, nie jest to à priori konieczne, żeby każda kropelka zawierała tylko 1 elektron, a to może zmienić rezultat. Ponadto w pierwszej chwili kropelki są mniej więcej równe, ale z czasem mniejsze kropelki znikają, a większe rosną, tak, że rachunek, który przyjmuje wszystkie za równe nie jest ścisły; co do rzędu jednak widać, że rezultat odpowiada jednemu jonowi w elektrolizie, otrzymaliśmy tam bowiem $e = 10^{-20}$ (e m) $= 3 . 10^{-10}$ (e st). —

Mamy jeszcze inne metody, które dają ta-
kże wielkości podobnego rzędu. Dotyczą one
właściwie cząstek „α" wyrzucanych przez rad.
Przed dwoma laty Rutherford & Geiger wyko-
nali pomiary ładunków, które transpor-
tują promienie „α." Rutherford przyjmował,
że składają się one z dwu elektronów, a raczej
brak tam każdemu atomowi dwóch elektro-
nów ujemnych. Metoda polegała na tem,
że mierzono raz prąd w ten sposób, że na
płycie naprzeciw umieszczonej powstaje ła-
dunek dodatni, z drugiej strony probowano
obliczyć liczbę cząstek. Dwiema metodami
bardzo ciekawemi. Jedna polega na zja-
wisku scintillacyi. Już Crookes spostrzegł,
że na ekranie pokrytym siarczkiem cyn-
ku i umieszczonym w pobliżu radium
powstaje migotanie, jakby tworzenie się
iskier i przyjmował, że cząstki „α" ude-

rzając o ekran wywołują chwilowe światło. Liczbę tych iskierek w 1 sekundzie można mierzyć, przepuszczając promienie przez wązką szparę. Ilość iskierek ma odpowiadać ilości cząstek wyrzuconych; znając tę liczbę i prąd, ładunek jednej cząstki można było obliczyć. Druga metoda polega na zjawisku jonizacji przy zderzeniu jonów. (durch Ionenstoss). Azeby gaz był przewodzącym, musi się w nim znajdować jon dodatni i ujemny, który można wytworzyć rozmaitymi sposobami np. promieniami Röntgena, promieniami α, β itd. Jeżeli napięcie elektryczne w rurce geisslerowskiej jest słabe, to przewodzą tylko te jony, które tam wytworzono, ale jeżeli napięcie elektryczne jest bardzo silne, to jony nabywają takiej prędkości, że same rozbijają drobiny gazu znowu na część dodatnią i ujemną, tworząc nowe

jony, wobec czego prąd nadzwyczajnie silnie wzrasta. Zjawiska tego, występującego przy two-rzeniu się iskry użył Rutherford w sposób następujący: Zbudował dwa naczynia w kształcie rury, kurkiem od siebie oddzielone (fig. 66)

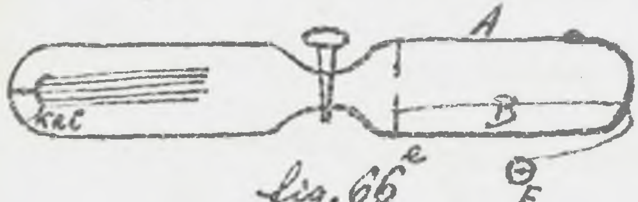


fig. 66

W jednem z nich znajdujący się kal jonizował cząstki gazu; przez wąski otwór kurka jo-ny w bardzo małej ilości, np. pojedynczo tyl-ko mogły przechodzić do drugiego naczynia. Tam zaś umieszczony był drut (B), połączony z elektrometrem (E) który połączony był z prą-dem ładującym go do stopniowo wzrasta-jących potencyałów. Między drutem, a zewnę-trzną metalową okładką rury (A) wytwa-rzał różnicę potencyału tak wielką, że w tej chwili, gdy jakiś jon dostał się do środka, nastąpiło nagłe rozbrojenie elektrometru.

Wskutek tego wychylenia elektrometru taka, dawały krzywą

fig. 67.

Powiedzmy, że na minutę przypadły 4 wzrosty, to to oznacza, że 4 jony dostały się do środka. Z przekrojów można było obliczyć, ile jonów wysłał każdy cm^2 na sekundę.

Obiema metodami otrzymano liczby zgodne. 1 gr Ra C wysyła $N = 3{\cdot}4 . 10^{10}\alpha$. Z obserwacji prądu obliczono, że ładunek takiej cząstki wynosi $E = 9{\cdot}3 . 10^{-10}$, ponieważ najmniejszą liczbą elektryczności jest elektron, mogą to być tylko wielokrotności elektronu. Z innych okoliczności Rutherford wnioskował, że na 1 cząstkę α przypadają 2 elektrony, czyli, że $e = 4{\cdot}65 . 10^{-10}$ zgodnie inną metodą (ze zjawisk promieniowania) Planck znalazł $e = 4{\cdot}67 . 10^{-10}$, a Zeemann mniej więcej

to samo.—

Promienie katodowe pierwszy badał Crookes. <u>Wiatraczek Crookesa.</u> Jeżeli na skrzydełka umieszczone na ruchomej osi puścimy promień katodowy, następuje ruch obrotowy. (fig. 68)

fig. 68.

Crookes sądził, że wyrzucane cząstki materyi, uderzając o skrzydła, poruszają je, ale interpretacya ta jest fałszywą. Jeżeli bowiem sztucznie zatrzymamy wiatrak, póki prąd przechodzi, i następnie pozwolimy mu się obracać, to on się porusza pomimo, że prądu nie ma. Powodem ruchu są po pierwsze ładunki elektryczne, które powstają na wiatraczku, a 2) ogrzanie i powstały wskutek tego prąd powietrza. Według teoryi promień katodowy po-

winien wywierać ciśnienie na miejsca, na które wpada, ale to ciśnienie jest bardzo małe, można je znaleźć rachunkiem. Niech przez rurkę przechodzi prąd $i = 0{\cdot}01\ Amp = 10^{-3}$ (e·s); oznacza on ilość elektryczności przenoszonej na sekundę. Odpowiada temu masa wynikająca z równania $\frac{e}{m} = 1{\cdot}86 . 10^7$

$$m = e \frac{1}{2 . 10^7} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-10}.$$

Taka masa doświadczalnie wogóle nie da się spostrzedz, ale wyrzucaną jest ona z prędkością rzędu 10^9 cm/sek, to znaczy, że ilość ruchu podczas jednej sekundy wpadająca na powierzchnię, która jest miarą ciśnienia jest $m u = \frac{1}{2} 10^{-1} = \frac{1}{20}$ dyny; to ciśnienie jest tak małe w porównaniu z innemi, które mamy w rurce, że dotychczas bezpośrednio nie zdołano go skonstatować. —

Wiemy, że prędkość promieni katodowych jest funkcyą potencyału rozbrojenia, zatem należy zapytać, jaki jest rozkład potencyału w rurce geisslerowskiej. Żeby prąd wogóle przechodził, musi różnica potencyałów przekroczyć pewną graniczną wartość, która zależy głównie od rodzaju gazu i od rodzaju katody. Okazuje się, że potencyał nie spada liniowo, ale że główny spad potencyału znajduje się w bliskości pannej katody, potem pozostaje prawie stały w ciemnej przestrzeni Faradaya, następnie w jasnej części z[illegible] występuje spad znaczniejszy, dopóki niebieskie światło nie pokryło jeszcze całej katody. Spad potencyału pomiędzy katodą, a ciemną przestrzenią Faradaya (Kathodenfall) jest wielkością stałą, określoną np. dla

Pt w H_2 — 298 Volt
N_2 — 232 "
O_2 — 369 "
para H_2O — 469 "
NH_3 — 382 "

W obrębie przestrzeni, gdzie występuje zna_
czna różnica potencyałów, elektrony otrzy_
mują swoją wielką chyżość. Jest jednak
rzeczą bardzo ciekawą, że przy użyciu
pewnych metali można tę chyżość bardzo
zmniejszyć. Jeżeli się mianowicie pokryje
katodę tlenkami CaO, BaO, SrO, to spad po_
tencyału zmniejsza się nadzwyczajnie, bo aż
do 5 Voltów. Pokrycie katody ułatwia wytworze_
nie się promieni katodowych. Z tego korzysta
się w praktyce. Naturalnie, że te promienie
katodowe, wytworzone w różnych warunkach
posiadają różne prędkości. Największych ró_
żnic potencyału potrzeba wtedy, gdy cała rur,

ka jest już wypełniona niebieskim światłem. W miarę, jak wypróżniamy rurkę, potrzeba również coraz większych różnic potencyałów. Promienie, które są odpowiednio szybkie w czasie równania $v = \sqrt{\frac{2e}{m}V} + 6.10^7 \sqrt{\text{voltów}}$. Tu mamy jeden sposób, aby wytworzyć promienie katodowe o różnych prędkościach. Tak można dojść do 2/3 prędkości światła przy 100000 volt. (Ta różnica potencyałów daje iskry na długość 1 m). Szybszych promieni tą metodą nie można otrzymać. Mamy poza tem promienie β, które są znacznie szybsze; dochodzą blisko do prędkości światła. Prócz tych promieni katodowych znamy inne jeszcze ich rodzaje, do których należą promienie wywołujące zjawisko zauważone pierwszy raz przez Hertza 1887, a badane potem przez Hallwacha, Righi'ego i Lenarda.

Nowe teorye el. i magn. Wyk. XXIV.

Jest to zjawisko fotoelektryczne. Pokazuje się, że w pobliżu powierzchni, na którą padają promienie pozafiołkowe powstaje przestrzeń przewodząca, płyty w tej przestrzeni umieszczone zatracają ładunek, czasem powstają nowe ładunki i t.d. Lenard udowodnił, że zjawiska te pochodzą stąd, że się w tym miejscu wytwarzają promienie katodowe. Wykazać to można w następujący sposób: na płytę metalową C (fig.69), umieszczoną w naczyniu napuszczamy

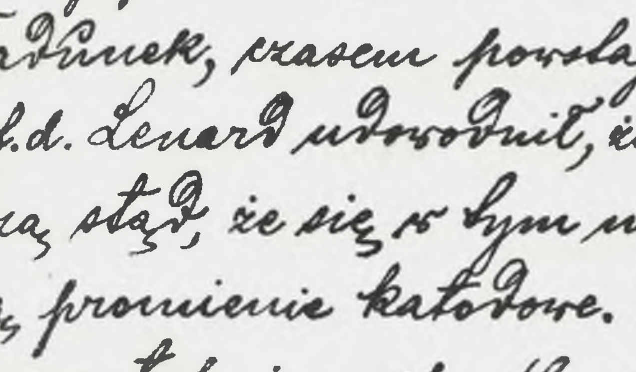


fig. 69.

światło pozafiołkowe np. za pomocą lampki rtęciowej. Przez szkło pozafiołkowy promień nie przechodzi, trzeba użyć okienka z kwarcu K. Na przeciwko umieszczamy elektrodę połączoną z elektrometrem. Początkowo wszystko

było połączone z ziemią. W chwili, gdy napuszczamy światło, elektrometr ładuje się ujemnie. Jeżeli się umieszcza magnes z biegunami przed i poza płaszczyzną rysunku, to promienie się odchylają tak, że elektrometr nie wychyla się. Z pomiarów pola magnetycznego można oznaczyć promień krzywizny, a wtedy mamy dane do mierzenia $\frac{e}{m}$ według metody pierwszej lub metodą wychyleń elektrostatycznych, przeprowadzając promień między płytkami kondenzatora; albo można poprostu te 2 płyty C i P uważać za kondenzator, dać jednej ładunek dodatni, drugiej ujemny. Jeżeli ładunek jest dość silny, może powstrzymać elektrony, które wprawdzie zostają wyrzucane, ale nie mogą dojść do drugiej płyty i nie mogą ładować elektrometru; jeżeli znajdziemy potencyał, przy którym elektrometr nie

otrzymuje ładunku, możemy obliczyć $\frac{e}{m}$ według wzoru $v = \sqrt{\frac{2e}{m}V}$; potencyał V, który jest potrzebny do zniszczenia ruchu wyno-
si mniej więcej 8 woltów, to znaczy, że prę-
dkości v są stosunkowo małe. $v = 2.10^8$ jest rzędem prędkości elektronów przy zjawi-
sku fotoelektrycznem. Zależy to zjawisko od materyału i od rodzaju światła wzy-
tego. Silnie działają cynk, magnezya, sód, potas, cezyum, rubidyum, równocześnie te metale są czułe nawet na światło czer-
wone. Wykazali to Elster & Geitel. Przy tem występują pewne, nie zupełnie jasno wy-
tłumaczone zjawiska „zmęczenia.“ Podo-
bnie, jak te metale, działają też inne ciała, zwłaszcza ciecze silnie zabarwione, jak fuksyna, anilina itd., ale ich dzia-
łanie jest słabsze. Trzeci sposób polega na promieniach wtórnych (Secundär Strahlen).

Wszędzie, gdzie promienie katodowe wpada-
ją, wywołują promienie Röntgena oraz
tzw. wtórne, które różnią się od wpadają-
cych tem, że zwykle posiadają mniejszą
prędkość. Rezultatów pewnych na tem
polu nie wiele. Czwarty sposób: promienie
wysyłane przez rozżarzone metale. Pro-
mienie katodowe same przez się nie są
widoczne, ale tylko wtedy, kiedy zostaną
absorbowane, a to dzięki temu, że w środ-
kach absorbujących wytwarzają zwykle
zjawiska świetlne. Tak działają też tlenki
metali; wysyłają bardzo silnie promienie
katodowe. Co do metali, badał to Richardson
także z punktu widzenia kinetycznego;
wyobrażał sobie, że metale są dysocyowo-
wane na elektrony, które nie wylatują
na zewnątrz, bo neutralne drobiny meta-
lu na to nie pozwalają, gdyż powstaje

siła elektrostatyczna, która przeciwdziała oddaleniu się elektronów swobodnych. Elektrony mogą wyjść tylko wtedy, gdy prędkość ich jest większą, a powiększamy prędkość, podwyższając temperaturę. Wobec tego rozżarzone metale wysyłają promienie katodowe i szybkość tych promieni jest według Thomsona, który je badał rzędu 10^7. Tak samo CaO, BaO itd. wysyłają promienie, gdy są rozżarzone. Badał to Wehnelt i znalazł $\frac{e}{m} = 1{\cdot}4 . 10^7$, a $1{\cdot}6 . 10^8 < v < 10{\cdot}7 . 10^8$. Jest rzeczą bardzo prawdopodobną, że te promienie występują jeszcze o wiele częściej; że powstają w płomieniu, dalej w różnych zjawiskach chemicznych, ale że natężenie ich jest bardzo małe. Płomienie przewodzą elektryczność w jednym kierunku łatwiej jak w drugim, przez umieszczenie w nich soli zostaje przewo-

dnictwo bardzo powiększone. To wszystko tłumaczy się na podstawie promieni katodowych. —

Różne rodzaje promieni katodowych różnią się między sobą prędkością i absorbcyą, promienie powolne zostają bardzo silnie absorbowane, podczas gdy promienie β przechodzą przez grube blachy bez przeszkody. Lenard wykonał bardzo ciekawe doświadczenie, badając absorbcyę w gazach, w papierze, w blasze itd. Wykazał, że istnieje ścisła proporcjonalność do gęstości ciała, tak, że w obrębie ciał tak różnej gęstości, jak srebro i złoto stosunek współczynnika absorbcji do gęstości $\frac{\alpha}{\rho}$ = const.

Np. dla H_2 pod ciśnieniem 3·3 mm. $\rho = 0{\cdot}00000368$, $\frac{\alpha}{\rho} = 4{\cdot}040$ —

Au $\rho = 19{\cdot}3$ $\frac{\alpha}{\rho} = 2880$.

Zdaje się, że absorbcya zależy tylko od ilości masy, a nie od rodzaju drobin. To tyczy się tylko promieni szybkich; powolne inaczej się zachowują.

Z faktu, że szybkie promienie katodowe przechodzą przez blaszki metalowe można wyprowadzić pewne wnioski co do rozmiarów elektronów.

Wyobraźmy sobie prąd elektronów wzdłuż osi $x$ów taki, że przez przekrój $1\,cm^2$ przechodzi co sekundy n elektronów o ładunku e, więc $i = ne$. Taki prąd wzbudza pole magnetyczne według prawa Biot & Savarta. Siła wywierana przez element ds w odstępie r jest $H = \frac{i\,ds \sin\theta}{r^2}$.

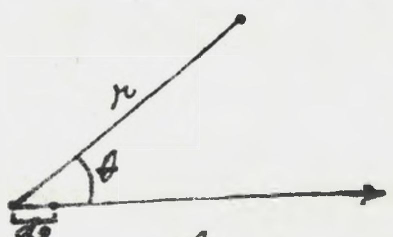


fig. 70

Elektrony poruszają się z prędkością u, nazwijmy odstęp dwu elektronów przez $ds = \frac{u}{n}$.

Podstawiając otrzymujemy siłę wywieraną przez 1 elektron poruszający się z prędkością u na punkt w odstępie r

$$H = \frac{i u \sin\theta}{n r^2} = \frac{e u \sin\theta}{r^2}.$$

Linie siły magnetycznej będą zatem kołami współśrodkowemi. Dla $\theta = 0$ siła $= 0$.

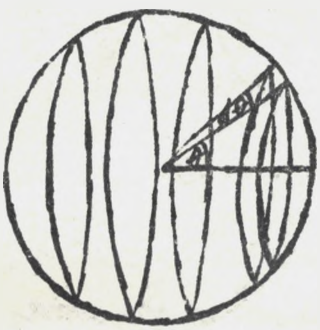


fig. 71.

W kierunku ruchu elektron żadnej siły nie wywiera. Linie sił reprezentują pewien zapas energii pola, który można obliczyć na zasadzie równania Maxwella $W = \frac{1}{8\pi}\iiint H^2 dv$.

Używamy układu kulistego; zmieniamy θ o $d\theta$ i r o dr, przez co otrzymujemy obręcz elementarną.

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint \frac{e^2 u^2 \sin^2\theta}{r^2}\, 2\pi r \sin\theta\, r\, d\theta\, dr =$$

$$= \frac{e^2 u^2}{4}\int_0^\pi\int_a^\infty \frac{\sin^3\theta\, d\theta\, dr}{r^2}$$

r zmienia się od a do ∞, gdyż przyjmujemy, że elektron jest kulką o promieniu a.

Wobec tego

$$W = \frac{e^2u^2}{4}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta$$

$$\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}\Big|_a^\infty = \frac{1}{a}; \quad \int \sin^3\theta\, d\theta = \int \sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= \int \sin\theta\, d\theta + \int \cos^2\theta\, d\cos\theta = -\cos\theta\Big|_0^\pi + \frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^\pi = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

A zatem

$$W = \frac{e^2u^2}{4}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{4}{3} = \frac{e^2u^2}{3a}$$

To jest energia jednego elektronu poruszającego się z prędkością u. Będzie to rodzaj energii potencyalnej proporcyonalnej do kwadratu prędkości. Jeżeli elektron jest kulą materyalną naładowaną poruszającą się z prędkością u, to posiada prócz energii kinetycznej materyalnej jeszcze energię elektromagnetyczną. Jest to wielkość bardzo mała, bo e jest dane w jedno-

stkach elektromagnetycznych.

Widać stąd, że można wytłumaczyć energię kinetyczną na podstawie elektromagnetycznej. Nawet gdyby ciało żadnej masy nie posiadało, a miało tylko ładunek, to zachowuje się tak, jak gdyby miało masę $m = \frac{2e^2}{3a}$. Można więc masę materialną zastąpić przez ładunek elektryczny. Spróbujmy to zrobić z elektronami: Obliczyliśmy stosunek $\frac{e}{m} = 2.10^7$ (e.m)

$$e = 3\cdot 4.10^{-10} \text{ (e st)} = 10^{-20} \text{ (e m)}$$

$$a = \frac{2}{3}\frac{e}{m}\cdot e = \frac{2}{3}\cdot 2.10^7 \cdot 10^{-20} = \frac{4}{3}10^{-13} \text{ cm}.$$

$\frac{4}{3}10^{-13}$ cm byłaby wielkość promienia elektronu. Jest on 10^5 razy mniejszy niż promień atomu. Rozumiemy wskutek tego, że to, co nazywamy atomem, jest tylko strukturą bardzo przezroczystą; tak np. atom H_2 zawiera 1000 elektronów, atom jest więc

rzadką chmurą elektronów. Jest teraz prze-
cz zrozumiałą, dlaczego atomy są tak
przeźroczyste dla promieni β. To, że promie-
nie katodowe zostają silnie absorbowane,
musi polegać na tem, że istnieją siły atrak-
cyjne między nimi a elektronami.

Ten rachunek daje nam pogląd na
rozmiary elektronów i na elektromagne-
tyczne wytłumaczenie masy mechani-
cznej. Występuje tu jednak jedna kwestja:
czy prawo Biota & Savarta, które służy za
punkt wyjścia tych rozumowań pozostaje
ważne dla elektronów, poruszających się
z prędkością rzędu światła; z tej teoryi,
którą znamy nie można na to dać odpo-
wiedzi; trzeba rozwinąć systematyczną te-
oryę elektronową, która ma zastąpić teo-
ryę Maxwella.

Teorya elektronowa.

Teoryę tę, która jest wydoskonaleniem teoryi Maxwella, rozwinął H. A. Lorentz. Maxwell uważał zarówno izolatory jak i metale za środki jednorodne o pewnem przewodnictwie λ, a Lorentz przyjmuje, że nie są jednorodne, ale składają się z elektronów. Wobec tego mało, ży równania odnoszące się do całości środka, trzeba zastąpić przez równania ściślejsze, które się odnoszą do pojedynczych elementów, a raczej do przestrzeni między elementami. Należy zastąpić dielektryk przez skupienie elektronów. Przestrzeń zajęta przez elektrony jest bardzo mała, najważniejsza jest przestrzeń między nimi, czyli to, co nazywamy eterem i do niego można stosować równania Maxwella

$$4\pi \mathfrak{J} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \tau} = -\operatorname{rot} \mathfrak{E}$$

Według tej teoryi nie mamy żadnego prądu przewodzenia, pozostaje zatem prąd przesunięcia i prąd konwekcyjny $\mathfrak{J} = \frac{k}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \varrho\,\mathfrak{u}$; a $k\mathfrak{f}$ jest to, co nazywamy polaryzacyą $\mathfrak{d}$; w eterze $k=1$, więc $\mathfrak{f} = \mathfrak{d}$. A zatem otrzymujemy 1sze równanie zasadnicze teoryi elektronowej w formie

I) $\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} + 4\pi\varrho\,\mathfrak{u} = c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{h}$, drugie pozostaje bez zmiany

II $\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{d}$.

Trzecie równanie odnosi się do siły pondomotorycznej, której doznaje ładunek elektryczny w polu elektromagnetycznem. Oprócz siły elektrostatycznej $\mathfrak{d}$ doznaje on w wypadku ruchu jeszcze działania sił elektromagnetycznych, a mianowicie elektron poruszający się z prędkością $\mathfrak{u}$ w polu H doznaje siły

$i H \sin(\mathfrak{f} ds) ds = n e H \sin(\mathfrak{f} ds) ds = e H u \sin(\mathfrak{f} ds)$; wobec tego, że ds kierunek elementu prądu jest równocześnie elementem ruchu, otrzymujemy ostatecznie jako siłę elektromagnetyczną wywieraną w polu na 1 elektron $e H u \sin(\hat{u} \mathfrak{f}) = e[\hat{u}\mathfrak{f}]$ (em). A na jednostkę masy przypada $\frac{1}{c}[\hat{u}\mathfrak{f}]$ (est). Stąd całkowita siła pondoromotoryczna

III $f = \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\hat{u}\mathfrak{f}]$.

To trzecie równanie Lorentza jest po części empiryczne, po części hypotetyczne, empiryczne o tyle, że oba te składniki są znane, pierwszy dla ciał w spoczynku, a drugi dla ciał w ruchu, hypotetyczną zaś jest sumacya tych składników.

Gęstość ϱ rozumiemy tak, jak u Maxwella $4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{d}$; ponieważ niema rzeczywistych mas magnetycznych, więc $\operatorname{div} \mathfrak{f} = 0$.

Zastosowania teoryi elektronowej.

1) Rozpatrywanie pola elektromagnetyczne„go, które powstaje naokoło ładunku ele„ktrycznego, poruszającego się z jednostajną prędkością.—

Robimy założenie, że mamy jakieś pole elektromagnetyczne, poruszają„ce się z jednostajną prędkością v da„nym kierunku. Równania, które się odnoszą do punktu w przestrzeni stałe„go przyjmują teraz pewien kształt spe„cyalny. Można się powołać na pewne równanie hydrodynamiki. Gdy punkt porusza się wraz z cieczą, to przyspie„szenie, którego doznaje, składa się ze zmiany czasowej w punkcie danym w przestrzeni i ze zmiany miejscowej wskutek przenoszenia się

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

To jest ogólnie ważne; jeżeli mamy jakąś wielkość fizyczną $F(x, y, z, t)$ to możemy zmianę ogólną wyrazić przez zmianę czasową i miejscową

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Jeżeli teraz rozpatrujemy elektron poruszający się, widzimy, że punkt, który się z nim porusza w tym samym kierunku i z tą samą prędkością nie zmienia pozycji względem danego elektronu, nie doznaje więc żadnej zmiany pola elektromagnetycznego. Dla niego $\frac{DF}{Dt} = 0$, stąd

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

Ta cząstkowa pochodna oznacza zmianę czasową pola elektromagnetycznego w tym danym punkcie przestrzeni. Podstawiamy to do naszych równań. Pierwsze będzie

$$\alpha)\ -\left(u\frac{\partial d}{\partial x} + v\frac{\partial d}{\partial y} + w\frac{\partial d}{\partial z}\right) + 4\pi\varrho u = c \operatorname{rot} f.$$

Przy tej sposobności zapoznamy się z okraca,

jącym symbolem wektorowym. W symbolice wektorowej pisze się pierwsze wyrażenie $(\mathfrak{u}\,\nabla)\,\mathfrak{d}$, gdyż

$$(\mathfrak{u}\,\nabla) = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\text{, a}$$

$$(\mathfrak{u}\,\nabla)\,\mathfrak{d} = \mathfrak{u}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{d} - \mathrm{rot}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{d}]$$

Sprawdzić to można przez rozkładanie na składowe, weźmy tę w kierunku osi x.

$$\mathfrak{d} = i D_1 + j D_2 + k D_3 = i X + j Y + k Z$$

$$\left[u\frac{\partial X}{\partial x} + v\frac{\partial X}{\partial y} + w\frac{\partial X}{\partial z}\right] = u\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(uY - vX) + \frac{\partial}{\partial z}(wX - uZ)$$

Składowe prędkości $u\ v\ w$ są stałe; tylko siły $X\ Y\ Z$ są zmienne, będzie więc identycznie

$$\left(u\frac{\partial X}{\partial x} + v\frac{\partial X}{\partial y} + w\frac{\partial X}{\partial z}\right) = u\frac{\partial X}{\partial x} + u\frac{\partial Y}{\partial y} + u\frac{\partial Z}{\partial z} - u\frac{\partial Y}{\partial y} + v\frac{\partial X}{\partial y} + w\frac{\partial X}{\partial z} - u\frac{\partial Z}{\partial z}\text{,}$$

odpowiednio będzie dla y i z.

Udowodniliśmy więc relacyę

$$(\mathfrak{u}\,\nabla)\,\mathfrak{d} = \mathfrak{u}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{d} - \mathrm{rot}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{d}]$$

Z tego teraz skorzystamy i podstawimy to do równania α). Według definicyi $4\pi\varrho = \mathrm{div}\,\mathfrak{d}$; zostaje

więc $\operatorname{rot}[\hat{u}\,\vartheta] = c \operatorname{rot} f$; z tego wnioskujemy, że

$$f = \frac{1}{c}[\hat{u}\,\vartheta] + N \qquad \beta)$$

N może być stałą całkowania pochodzącą od jakiegoś potencyału $N = \nabla V$; w takim razie $\operatorname{rot} N = \operatorname{rot} \nabla = 0$. Później pokazuje się, że $N = 0$. To wynika z pierwszego równania Maxwella.–

Gdy podobne podstawienie zrobimy w drugim równaniu otrzymamy $\frac{\partial f}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}\right) =$
$= -\hat{u}\, \operatorname{div} f + \operatorname{rot}[\hat{u}\, f] = -c \operatorname{rot} \vartheta$; zatem mamy $\vartheta = -\left[\frac{\hat{u}}{c} f\right] + n'$, przyczem n' pochodzi z potencyału. Widzimy, że to, co nazywamy n' jest właściwie „F" siła elektryczna. Stąd wynika, że F pochodzi od potencyału skalarnego jest więc funkcyą potencyalną. $F = -\nabla U = \vartheta + \frac{1}{c}[\hat{u} f]$ $\gamma)$

Podstawiając w $\gamma)$ wyrażenie (β) mamy równanie

$$F = -\nabla U = \vartheta + \frac{1}{c^2}\,[\hat{u}[\hat{u}\,\vartheta]] \qquad \delta)$$

którem będziemy dalej operować; zawiera ono wyłącznie wielkości elektryczne.

Zamiast operować tem ogólnem równaniem

obieramy dla uproszczenia układ współrzędnych taki, by kierunek ruchu spadał w oś x. Wtedy $\mathfrak{v} = u\,i$ i powyższe wyrażenie się upraszcza.—

$$[\mathfrak{v}\,\vartheta] = u[i(iX + jY + kZ)] = u(kY - jZ)$$

$$[\mathfrak{v}[\mathfrak{v}\,\vartheta]] = u^2[i(kY - jZ)] = u^2(-jY - kZ)$$

wobec tego wyrażenie na f przyjmie kształt

$$\varepsilon)\quad f = -\nabla U = \vartheta - \frac{u^2}{c^2}(jY + kZ)$$

Składowe równania ε)

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = X$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = Y - \frac{u^2}{c^2}Y = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)Y$$

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = Z - \frac{u^2}{c^2}Z = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)Z$$

przypominają równania w elektrostatyce. X, Y, Z daje się wyrazić przez pochodne potencyału, ale istnieje asymetrya. Można teraz znowu skorzystać z równania, że w całym eterze $\operatorname{div}\vartheta = 0$, to znaczy, że $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$. Nazwijmy dla skrócenia $1 - \frac{u^2}{c^2} = s^2$. Wtedy różniczkując równania

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{1}{s^2}\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{1}{s^2}\frac{\partial U}{\partial z}$$

kolejno względem x y z i dodając, otrzymuje się

$$\eta) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

To jest zasadnicze równanie, z którem będziemy mieli do czynienia; określa ono t.zw. potencyał konwekcyjny (Convections, potential). Można je przekształcić

$$s^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \left(\frac{x}{s}\right)^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

To ma teraz postać zwykłego równania potencyału. Jeżeli więc w zwykłym potencyale zastępujemy x przez $\frac{x}{s}$, otrzymujemy potencyał konwekcyjny.

Połóżmy np. $U = \dfrac{A}{\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2 + y^2 + z^2}}$

stąd siły

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Ax}{s^2\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2+y^2+z^2}^3} \\ Y &= -\frac{1}{s^2}\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{s^2}\frac{Ay}{\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2+y^2+z^2}^3} \\ Z &= -\frac{1}{s^2}\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{s^2}\frac{Az}{\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2+y^2+z^2}^3} \end{aligned}\right\}$$

Zatem siła wypadkowa $D = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} =$

$$= \frac{Ar}{s^2\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2+y^2+z^2}^3}$$

To wyrażenie można przekształcić, wprowadzając r do mianownika $y^2+z^2 = r^2-x^2$, stąd

$$D = \frac{Ar}{s^2\sqrt{r^2+x^2\left(\frac{1}{s^2}-1\right)}^3}\ ;\quad \frac{1}{s^2}-1 = \frac{1-s^2}{s^2} = \frac{\frac{u^2}{c^2}}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$D = \frac{A}{s^2r^2\sqrt{1+\frac{\frac{u^2}{c^2}}{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\frac{x^2}{r^2}}^3} = \frac{As}{r^2\sqrt{s^2+\frac{u^2}{c^2}\cos^2\gamma}^3}$$

$$D = \frac{As}{r^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\gamma}^3}$$

(γ oznacza kąt między promieniem do danego punktu i osią x)

Siła elektryczna w bliskości punktu porusza-jącego się z prędkością jednostajną jest zno-wu odwrotnie proporcyonalna do kwadra-tu promienia, ale prócz tego zależy od ką-ta, pod którym promień jest nachylony do kierunku ruchu. Jeżeli prędkość v jest = 8, mamy prawo Coulomba, w każdym innym razie jest siła inna w kierunku osi, inna zaś w kierunku prostopadłym. Z tego można sobie zdać sprawę bez ra-chunków, wychodząc z uwagi, że dostanie-my zwykłe równanie dla potencyału, je-żeli zastąpimy x przez $\frac{x}{s}$, to znaczy, je-żeli x zmniejszymy w stosunku 1:s.

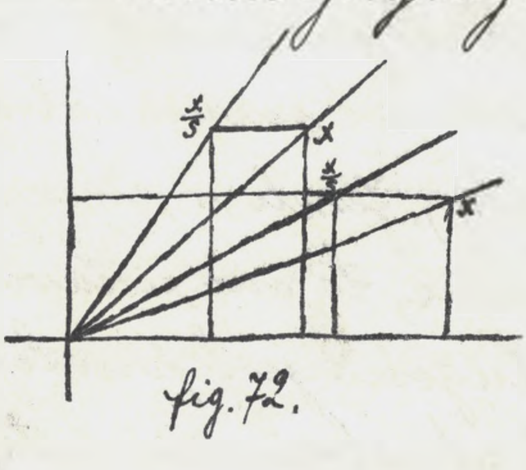


fig. 72.

Póki punkt jest w spoczynku, linie sił rozchodzą się je-dnostajnie we wszystkich kierunkach przestrzeni.

Gdy punkt porusza się z prędkością u, wszystkie x zmniejszają się, wszystkie linie siły zbliżają się do płaszczyzny prostopadłej do kierunku ruchu. Gdy prędkość $u = c$, wszystkie linie sił koncentrują się w tej płaszczyźnie prostopadłej. To zmniejszanie się odstępu x w stosunku $1:s$ nazywa się Schwungs-Kontraktion. Porównując układ sił w tym wypadku istniejących z układem sił dla ciała odpowiedniego będącego w spoczynku, widzimy, że są analogiczne, tylko, że współrzędne wypadku ruchu są zmniejszone w stosunku $1:s$. Thomson, powołując się na analogię z hydrodynamiką, wyobraża sobie linie sił, jako coś namacalnego (rurki Faradaya, pręty). Jeżeli w cieczy poruszamy ciało podłużne, to ono ustawia się tak, że kierunek długości jest prostopadły do kierunku ruchu. Analogicznie tutaj, gdy

ciało z prądami Faraday'a porusza się w ete-
rze, to eter wywiera siłę taką, która stara
się ustawić prądy w kierunku poprzecznym,
a to tem bardziej, im szybszy jest ruch.
Jeżeli n. p. wszystkie linie sił są prostopa-
dłe do kierunku ruchu. Wobec tego elektro-
ny poruszające się z prędkością światła
będą wywierały siły jedynie w kierunku
prostopadłym do swego ruchu, ale tem siły
będą nieskończenie wielkie. —

Gdy kula porusza się w cieczy (*) idealnej
to dopóki prędkość jest jednostajna, ciecz
żadnego wpływu nie wywiera, ale skoro prę-
dkość kuli się zmienia, to obecność cieczy
wywiera taki wpływ, że powiększa pozornie
masę kuli, a właściwie bezwładność. Masę
kuli trzeba powiększyć o połowę masy cie-
czy wypartej. Coś podobnego zachodzi w wy-

(*) Nowe teorye el. i magn. Art. XXVII.

padku elektromagnetyzmu. Nawet ciało, które niema żadnej masy materyalnej, tylko ładunek elektryczny otrzymuje wskutek ruchu pozorną energię kinetyczną. — Otrzymaliśmy jako siłę wypadkową $D = \frac{As}{r^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\gamma}^{\,3}}$ — tu mamy stałą nieoznaczoną A. Dla jej określenia potrzeba znać ładunek ciała poruszającego się. Wiemy, że 4π krotny ładunek daje ilość linii sił, które przechodzą przez powierzchnię otaczającą ładunek q.

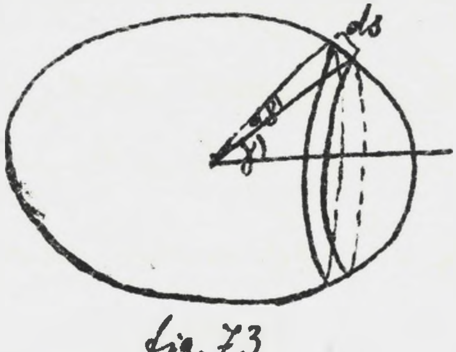


fig. 73

$$\int D\,dS = 4\pi q$$

$$4\pi q = As\int \frac{2\pi r \sin\gamma\, r\, d\gamma}{r^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\gamma\right)^{3/2}}$$

$$q = \frac{As}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\gamma\right)^{3/2}}$$

$$q = -\frac{As}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\cos\gamma}{\left[\underbrace{1-\frac{u^2}{c^2}}_{s^2}+\frac{u^2}{c^2}\cos^2\gamma\right]^{3/2}} =$$

$$= -\frac{As}{2}\frac{c}{u}\int\frac{d\frac{u}{c}\cos\gamma}{\sqrt{s^2+\frac{u^2}{c^2}\cos^2\gamma}^3} = -\frac{As}{2}\frac{c}{u}\int_{\frac{u}{c}}^{-\frac{u}{c}}\frac{dx}{\sqrt{s^2+x^2}^3}$$

Wiemy, że całka postaci

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}^3} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$$ i po podstawieniu

otrzymujemy

$$q = \frac{2As}{2}\frac{c}{u}\frac{\frac{u}{c}}{s^2\sqrt{s^2+\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{A}{s}$$

Zatem $A = q\,s$; wobec tego

$$U = \frac{q\,s}{\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2+y^2+z^2}},$$

zaś $$D = \frac{q\,s^2}{r^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\gamma\right)^{3/2}}$$

Siła jest proporcjonalna do $\frac{1}{r^2}$, ale zależy też od kąta. Siła magnetyczna $f = \frac{1}{c}[\hat{u}\,\vartheta]$,

$H = \frac{1}{c}\,\frac{q\,s^2 u\sin\gamma}{r^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\gamma\right)^{3/2}}$ co do kierunku widać, że

H jest prostopadła do D i do u. Linie sił będą

tworzyły koła otaczające oś x. Mając te wielkości można obliczyć siłę $F = \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{f}]$.

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{q\,x}{s\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2 + y^2 + z^2}^3} \\ F_2 &= -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{q\,y}{\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2 + y^2 + z^2}^3} \\ F_3 &= -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{q\,z}{\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2 + y^2 + z^2}^3} \end{aligned}\right\}$$

Wypadkowa siła

$$F = \frac{q\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2 + y^2 + z^2}^3} = \frac{q}{\left(\frac{x}{s}\right)^2 + y^2 + z^2}$$

Zważymy, że $x^2 = r^2 - y^2 - z^2 = r^2\cos^2\gamma$

$$y^2 + z^2 = r^2\sin^2\gamma$$

wobec tego $F = \frac{q}{r^2}\left[\frac{\cos^2\gamma}{r^2} + \sin^2\gamma\right] = \frac{q\,s^2}{r^2\left[1 - \frac{u^2}{c^2}\sin^2\gamma\right]}$

Tak więc mamy wszystkie wzory, których nam potrzeba. W praktyce obserwujemy tylko siłę F wskutek działań mechanicznych, podczas gdy $\mathfrak{f}$ i $\mathfrak{d}$ obserwować nie możemy. Te wielkości są tylko pomocniczymi wektora,

mi w teoryi elektronów. W naszym przypadku jest to siła wywierana przez jednostkowy nabój elektryczny poruszający się razem z elektronem. Mieliśmy dla naboju elektrycznego $U = \frac{A}{\sqrt{\left(\frac{x}{s}\right)^2 + y^2 + z^2}}$; jeżeli to położymy = const., otrzymamy powierzchnię equipotencyalną; będzie nią elipsoida obrotowa. $\left(\frac{x}{s}\right)^2 + \underbrace{y^2 + z^2}_{\rho^2} = c$, czyli $\frac{x^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} + \rho^2 = c$. Mianownik przy x^2 jest proporcyonalny do osi dużej, rozciągłość w kierunku osi x jest mniejsza, niż w kierunku osi y - będzie to więc elipsoida spłaszczona, tzw. elipsoida Heaviside'a.

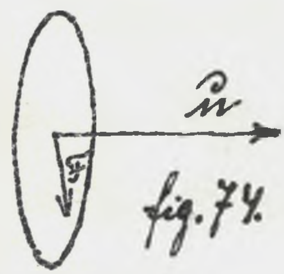


fig. 74.

Przejdźmy do innego zagadnienia. Wyobrażamy sobie elektron, jako kulę naładowaną i pytamy, jaka będzie siła wywierana w jego otoczeniu i jaka będzie energia pola elektromagnetycznego elektronu poruszającego się z je-

dnostajną prędkością. Obliczyliśmy dotych, czas ϑ, f, F w bliskości masy poruszającej się z jednostajną prędkością. Będzie to wa, żne też dla elektronu, dopóki odstęp od nie, go jest tak duży, że można elektron uważać za punkt. Jeżeli jednak zbliżymy się do ele, ktronu tak bardzo, że kształt jego wchodzi w rachubę, trzeba rachunki inaczej prze, prowadzić, dawniejsze równania bowiem nie spełniają warunku, że elektron ma być kulą, bo wtedy powierzchnie equipotencyal, ne musiałyby być kulami, a nie eli, psoidami. Zadanie jest więc takie:

Trzeba znaleźć taką funkcyę U, która speł, nia wszystkie warunki ciągłości oraz równa, nie $s^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$ i która na powierz, chni kuli elektronu jest stała. Żeby taki po, tencyał U znaleźć, trzeba to redukować na równanie Laplace'a, podstawiając zamiast $x - sx$.

Linie sił koło punktu poruszającego się ścieśniają się, zmieniając współrzędną „x" punktu nieruchomego w stosunku 1:s.
Odwrotnie, przykład ciała poruszającego się można porównać z nieruchomem, powiększając współczynnik ciała poruszającego się w stosunku 1:s. —

Wychodzimy więc z rozkładu potencyału dla elipsoidy wydłużonej w elektrostatyce i potencyał ten zmniejszony w stosunku 1:s podstawiamy do równania

$$s^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

Przekonamy się, że ten potencyał to równanie spełnia, i że na powierzchni kuli jest = constans. Mając potencyał U można obliczyć siłę f z równań $D_1=-\frac{\partial U}{\partial x}$, $D_2=-\frac{1}{s}\frac{\partial U}{\partial y}$, $D_3=-\frac{1}{s}\frac{\partial U}{\partial z}$.
W dalszym ciągu oblicza się siłę elektronu d, następnie siłę f, potem energię W pola elektromagnetycznego na podstawie równa-

nia Maxwella $W=\frac{1}{8\pi}\iiint(D^2+H^2)\,dv$; gdy się to scały, ... wykona, otrzyma się następujące wyraże, nie $W=\frac{q^2}{a}\left[\frac{c}{2u}\lg\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}-1\right]$ (Bucherer: Einführung in die Elektronentheorie). Widzimy, że energia pola elektromagnetycznego zależy od prędkości u, z którą elektron się porusza, ale w sposób dość zawiły. Upraszcza się to, jeżeli lg rozwiniemy w szereg: $\lg\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$

$$W=\frac{q^2}{a}\left[\frac{c}{u}\left(\frac{u}{c}+\frac{1}{3}\left(\frac{u}{c}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{u}{c}\right)^5+\cdots\right)-1\right]=$$

$$=\frac{q^2}{a}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{u}{c}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{u}{c}\right)^4+\cdots\right].$$

Jeżeli $\frac{u}{c}$ nie jest zbyt duże, można się ograniczyć na pierwszym wyrazie. Energia pola elektromagnetycznego jest wtedy proporcjonalna do kwadratu prędkości. Istnieje analogia do równania $W=\frac{mu^2}{2}$; stąd otrzymujemy masę

$$\frac{mu^2}{2}=\frac{q^2}{3a}\,\frac{u^2}{c^2}$$

$$m=\frac{2}{3}\frac{q^2}{ac^2}$$

Masa elektronu poruszającego się zależną jest od prędkości, jest więc tylko pozornie stałą. Stwierdził to doświadczalnie Kaufmann. Pokazał, że dla promienia katodowego masa przedstawia się jako stała wielkość, ale dla promienia β radu mamy znaczne powiększenie mas.—

To wszystko jest wyprowadzone pod założeniem Lorentza, że elektron jest kulą posiadającą pewien ładunek powierzchniowy. Abraham wyprowadził wzory także pod innem założeniem. Przyjmował on, że ładunek elektronu jest przestrzenny, czyli, że elektron jest kulą wypełnioną. Pod tem założeniem wzór się zmienia; tylko pierwsza potęga pozostaje ta sama. Istnieją jeszcze inne hypotezy. Potem Lorentz przyjmował, że ciało poruszające się zmienia automatycznie rozmiary

we wszystkich kierunkach, a to w stosunku 1:s. W takim razie rachunek się zmienia, bo elektron w ruchu będący nie jest kulą ale elipsoidą Heaviside'a. Bucherer przyjął również, że elektron się zmienia na elipsoidę, ale objętość jego pozostaje niezmieniona. A priori nie można powiedzieć, która hypoteza jest słuszna. Z powodu tego, że wyższe potęgi się różnią, otrzymuje się różne wyrażenia dla energii, a stąd różne dla masy. Obserwując masę można jednak sprawdzić, która z tych hypotez jest słuszną. Trzeba dla wszystkich promieni β obserwować masę i obliczyć eksperymentalnie zmienność masy, potem rozwinąć to w szereg i porównać, który z wzorów najlepiej się zgadza. Na tem polu wykonali doświadczenia Kaufmann, Bucherer i Hupka, ale zgodnego wyniku dotychczas nie ma.

Przytem jest jeszcze jedna ważna rzecz; wiemy, że masę mechaniczną można wytłumaczyć jako pozorną energię pola elektromagnetycznego przez kwadrat prędkości. Wobec tego, że masa zależy od prędkości, mamy różne wyrażenia na masę, zależnie od kierunku ruchu.

Ważne jest rozróżnienie szczególnie masy podłużnej (longitudinale Masse) i masy poprzecznej (transversale Masse). Wynika to stąd, że w teoryi elektromagnetycznej upada prawo doświadczalne, że przyśpieszenia dwóch ciał na siebie oddziaływujących są do siebie w stałym stosunku; nie można tu zatem wprowadzić masy, jako fundamentu i stąd przejść do sił, lecz odwrotnie: wychodzi się z pojęcia siły F, z której się wnioskuje o masie elektronów. - W jaki sposób wnioskujemy,

zależy od zjawiska ruchu.

$$f = m\frac{d^2 w}{dt^2} = m\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathfrak{u}) = \frac{d}{dt}(\mathfrak{A})$$

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ Y &= m\frac{d^2y}{dt^2} \\ Z &= m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \mathfrak{u} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt}$$

Wektor $\mathfrak{A}$ nazywa się „Bewegungsgrösse", moment ruchu, ilość ruchu. Nazwa jest nieodpowiednia, nie jest to bowiem wielkość ilościowa, ale wektorowa. Można to rozłożyć $\mathfrak{A} = A\,\mathfrak{A}_0$; $\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{dA}{dt}\mathfrak{A}_0 + A\frac{d\mathfrak{A}_0}{dt}$

$$\frac{d\mathfrak{A}_0}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}_0}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

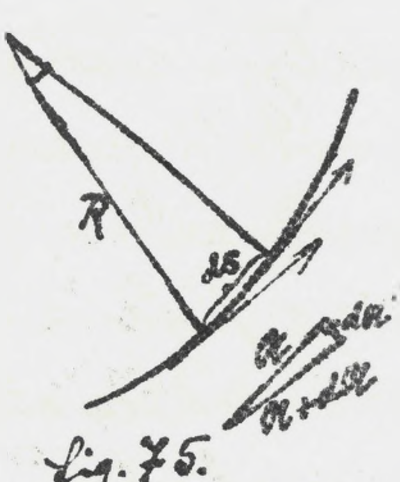


fig. 75.

Co to jest $\frac{d\mathfrak{A}_0}{ds}$? $\mathfrak{A}_0$ ma zawsze kierunek ruchu, więc kierunek styczny. Różnica dwóch wektorów jednostkowych w dwóch punktach będzie

wektor prostopadły do nich. Wykreśliwszy 2 prostopadłe w tych punktach, otrzymujemy 2 trójkąty podobne, z których mamy relację $|d\mathfrak{A}_0| : ds = 1 : R$, $\left|\frac{d\mathfrak{A}_0}{ds}\right| = \frac{1}{R}$.
Zatem $\frac{d\mathfrak{A}_0}{ds} = \frac{u}{R}\mathfrak{R}_0$. ($\mathfrak{R}_0$ oznacza kierunek prostopadły do kierunku ruchu.)

$$F = \frac{d\mathfrak{A}}{ds} = \mathfrak{A}_0 \frac{dA}{ds} + \mathfrak{R}_0 \frac{Au}{R}.$$

Siła składa się z części, która ma kierunek chwilowego ruchu i z części prostopadłej do tego kierunku: $F = F_l + F_t$.
Jeżeli $\mathfrak{A} = m\mathfrak{u}$, i masa jest wielkością stałą, to bezwzględna wartość

$$F_l = m\frac{du}{ds}, \quad F_t = m\frac{u^2}{R}$$

Ale to nie będzie więcej ważne, jeżeli masa m będzie zależna od prędkości. W takim razie trzeba rekurować na równania

$$F_l = \frac{dA}{ds} = m_l\frac{du}{ds}; \quad m_l = \frac{dA}{du}$$

$$F_t = \frac{Au}{R} = m_t\frac{u^2}{R}; \quad m_t = \frac{A}{u}$$

Mamy więc dwa sposoby by znaleźć masę danego ciała. Do dyspozycyi mamy jakąś siłę, reprezentowaną np. przez sprężynę, która może na to ciało działać albo wzdłuż ruchu chwilowego albo prostopadle, stąd można otrzymać m_l i m_t. Między temi wielkościami istnieje związek, który można otrzymać przez wyrugowanie A. Z pierwszego równania $A = \int m_t \, du$, podstawiając to do drugiego, mamy $m_t = \frac{1}{u} \int m_l \, du$. Masę longitudynalną można obliczyć z wyrażenia na energię tego systemu. Jeżeli bowiem siły tak używamy, że powoduje tylko przyspieszenie ruchu, to wzrost energii pola elektromagnetycznego równa się pracy wykonanej.

$$F_l \, ds = dW; \quad F_l = \frac{dW}{ds} = m_l \frac{du}{dt}$$

$$m_l = \frac{dW}{ds} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{1}{u} \frac{dW}{du}$$

Mieliśmy

$$W = \frac{q^2 u^2}{a}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{u^2}{c^2} + \frac{1}{7}\frac{u^4}{c^4} + \cdots\right]$$

$$\frac{dW}{du} = \frac{q^2}{a}\left[\frac{2u}{3} + \frac{4}{5}\frac{u^3}{c^2} + \frac{6}{7}\frac{u^5}{c^4} + \cdots\right]$$

Stąd

$$m_l = \frac{2q^2}{3a}\left[1 + \frac{6}{5}\frac{u^2}{c^2} + \frac{9}{7}\frac{u^4}{c^4} + \cdots\right]$$

$$\int m_l\, du = \frac{2}{3}\frac{q^2}{a}\left[u + \frac{3}{5}\frac{u^3}{c^2} + \frac{9}{35}\frac{u^5}{c^4} + \cdots\right]$$

$$m_t = \frac{1}{u}\int m_l\, du = \frac{2}{3}\frac{q^2}{a}\left[1 + \frac{3}{5}\frac{u^2}{c^2} + \frac{9}{35}\frac{u^4}{c^4} + \cdots\right]$$

O ile prędkości są stosunkowo nie duże, tak, że wyższe potęgi można pominąć, wyrażenia na m_l i m_t są identyczne, jeżeli jednak wyższe potęgi wchodzą w rachubę, widać, że m_l rośnie prędzej z szybkością ruchu niż m_t.

Są to logicznie wyprowadzone konsekwencye z równań elektromagnetycznych pod założeniem, że elektron jest kulą niezmienną o ładunku powierzchniowym.

Sprawdzają te wnioski doświadczenia Kaufmanna nad promieniami katodowymi i promieniami β radu. Mierzył on stosunek $\frac{e}{m}$ kombinując siły i odrzymał:

u	$\frac{e}{m_e}$
$0{\cdot}7 . 10^{10}$	$1{\cdot}865 . 10^{7}$
$2{\cdot}36 . 10^{10}$	$1{\cdot}91 . 10^{7}$
$2{\cdot}59 . 10^{10}$	$0{\cdot}97 . 10^{7}$
$2{\cdot}83 . 10^{10}$	$0{\cdot}63 . 10^{7}$

W miarę wzrostu prędkości stosunek $\frac{e}{m}$ maleje; przy stałem e rośnie m. Mamy tu do czynienia z masą poprzeczną, bo mierzono skrzywienie promienia.

Z tego punktu widzenia należałoby uważać wszystkie masy za pozorne, za wynikające z energii pola elektromagnetycznego i trzebaby zrewidować całą mechanikę. Wskutek tego, że masa zależy nie tylko od

prędkości, ale także od kierunku ruchu; upada np. prawo składania sił, poniekąd prawo akcyi i reakcyi i t. d. Jest jeszcze kwestyą wątpliwą, jak daleko sięga.

Lorentz i Abraham (przedtem Heaviside) doszli do tych wniosków w nieco odmienny sposób, badając siłę działającą na jakieś ciało w polu magnetycznem.

Jeżeli $F = \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{u} \mathfrak{f}]$, to na masę $\varrho\, dv$ działa iloczyn z F i $\varrho\, dv$, a na całe ciało:

$$\int \varrho F dv = \int \mathfrak{d} \varrho\, dv + \frac{1}{c}\int [\mathfrak{u} \varrho \mathfrak{f}]\, dv.$$

Całe dalsze zadanie polega na transformacyi $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int \mathfrak{d}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{d}\, dv$ (ponieważ $\varrho = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{div}\, \mathfrak{d}$); weźmy składową należącą do osi x

$$\iiint D_1\left(\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} + \frac{\partial D_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint D_1 (D_1\, dS \cos nx + D_2\, dS \cos ny + D_3\, dS \cos nz) -$$

$$- \iiint \left(D_1 \frac{\partial D_1}{\partial x} + D_2 \frac{\partial D_1}{\partial y} + D_3 \frac{\partial D_1}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

Ponieważ $D_1 \frac{\partial D_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(D_1^2+D_2^2+D_3^2) - D_2\frac{\partial D_2}{\partial x} - D_3\frac{\partial D_3}{\partial x}$,
przeto całka objętościowa ma postać

$$\iiint \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(D_1^2+D_2^2+D_3^2)\,dv - \iiint \left(D_2\frac{\partial D_2}{\partial x} - D_2\frac{\partial D_1}{\partial y} - D_3\frac{\partial D_1}{\partial z} + D_3\frac{\partial D_3}{\partial x}\right)dv.$$

Wyrażenie pod drugim znakiem całkowym jest identyczne ze składową w kierunku osi „i" następującego iloczynu wektorowego

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_2 & D_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ D_3 & D_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = [\mathfrak{D}\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{D}]$$

Odpowiednie wyrażenia otrzymamy dla składowych należących do j i k.
Razem zebrane daje to

$$\int \mathfrak{D}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D}\,dv = \int \mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_n\,dS - \frac{1}{2}\int \mathrm{div}(\mathfrak{D}^2)\,dv - \int[\mathfrak{D}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{D}]\,dv.$$

Druga całka zmienia się przez twierdzenie

Gaussa na całkę powierzchniową $\frac{1}{2}\int \operatorname{div}(\mathfrak{d}^2)dv = \frac{1}{2}\int \mathfrak{d}_n^2 d_1 S$. Pozostałą całkę objętościową można dalej transformować, gdyż z drugiego równania Maxwella jest

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{d}, \text{ zatem}$$

$$\int \mathfrak{d} \operatorname{div} \mathfrak{d}\, dv = \int \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}_n d_1 S - \frac{1}{2}\int \mathfrak{d}_n^2 d_1 S + \int \left[\mathfrak{d} \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t}\right] dv.$$

To jest pierwsza część. W drugiej występuje $\int[\mathfrak{u}\rho\mathfrak{h}]dv$, a że $\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} + 4\pi\rho\mathfrak{u} = c \operatorname{rot}\mathfrak{h}$, więc

$$\int[\mathfrak{u}\rho\mathfrak{h}]dv = c\int[\operatorname{rot}\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}]dv - \int\left[\frac{\partial\mathfrak{d}}{\partial t}\mathfrak{h}\right]dv.$$

Transformując odpowiednio powyższe wyrażenie otrzymamy sumę dwu całek: powierzchniowej i objętościowej.

Lorentz powiada, że całkowita siła składa się z dwóch części: 1) z siły działającej na powierzchnię tej części przestrzeni, nad którą wykonaliśmy całkowanie i 2) z siły, która działa na wszystkie elementy tej przestrzeni. — Gdy tę powierzchnię oddalamy do nieskończoności, całka powie-

rzchniowa znika, pozostaje tylko objęto-ściowa: $\int \mathfrak{S} f\, dv = -\frac{c^2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int[\mathfrak{d}\mathfrak{h}]dv$, tzn., że siłę mechaniczną działającą na jakieś ciało można znaleźć, obliczając całkę nad nieskończoną przestrzenią. Weźmy z niej pochodną czasową

$f = \frac{\partial}{\partial t}\int[\mathfrak{d}\mathfrak{h}]dv$, to ma kształt prawa Newtona $f = \frac{d}{dt}\mathfrak{A}$, tak, że

$$\int[\mathfrak{d}\mathfrak{h}]dv = \mathfrak{A}.$$

Ilość ruchu można sprowadzić na wielkość w całej przestrzeni rozłożoną. Liczbowo zgadza się to z prądem energii Poyntinga. Wykonując to całkowanie otrzymuje Lorentz $\mathfrak{A}$, a stąd w dalszym ciągu m_1 i m_2.

Zjawiska, które dały podstawę do przyjęcia teorji elektronowej.

1.) Zjawisko Zeemanna. Już Faraday badał wpływ pola elektromagnetycznego na

światło. Znalazł, że niektóre ciała w polu elektromagnetycznem nabierają własności skręcenia płaszczyzny polaryzacyi, ale bez-pośredniego wpływu pola na źródło światła nie odkryto. Dopiero Zeemanowi udało się wykazać, że źródło światła zmienia się w polu elektromagnetycznem, tak np. przy świetle sodowem linia D rozszczepia się na 2 względnie 3 linie. Odchylenie jest bardzo małe, występuje dopiero przy silnej dyspersyi i użyciu silnego pola magnetycznego. O sensacyjnem tem odkryciu donióśł Zeemann telegraficznie Lorentzowi, który mu natychmiast odpowiedział, że w takim razie światło obserwowane musi być spolaryzowane, co też Zeemann istotnie skonstatował. Według teoryi elektronowej drgania światła pochodzą od drgań mechanicznych elektronów w izolatorach

się znajdujących; te drgania odbywają się we wszystkich możliwych kierunkach, a w kierunku rozchodzenia się promienia, (w którym włożymy oś x.) istnieją tylko prostopadłe, t. zn. w kierunku y i z. Będą to w ogólnym wypadku drgania liniowe, które można

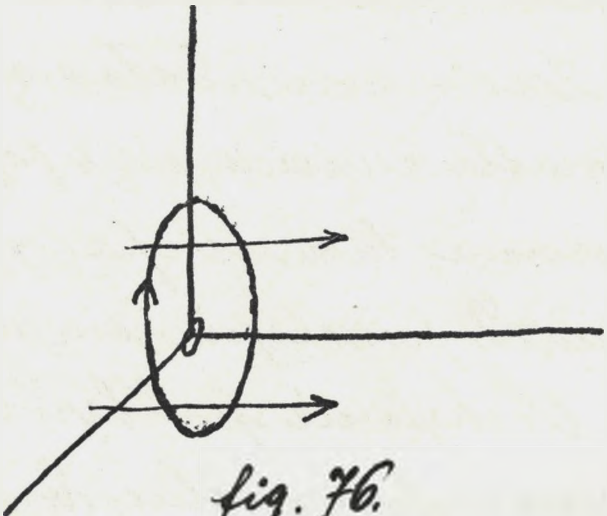


fig. 76.

uważać za superpozycyę dwóch drgań cyrkularnych.

Jeżeli się tu umieści pole magnetyczne w ten sposób, że linie sił pola magnetycznego są równoległe do osi x, to elektron będzie podlegał siłom wychylającym, a to jeżeli

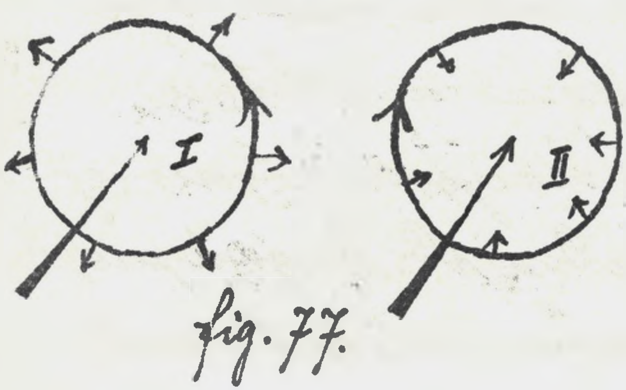


fig. 77.

li siły magnetyczne przebiegają z przo-
du poza płaszczyznę rysunku, to według
reguły Flemminga w pierwszym wypad-
ku siła będzie skierowana na zewnątrz,
(fig. I), w drugim ku wnętrzu (fig. II). Więc
pierwsze elektrony będą się starały po-
większyć promieniary koła, drugie zmniej-
szyć. Drgania elektronów pochodzą stąd,
że istnieje siła rodzaju sprężystej, która
stara się sprowadzić je do pozycyi ró-
wnowagi, czyli ściągnąć do punktu
środkowego „O." Taka siła jest proporcyo-
nalna do odstępu „R." Musi istnieć równo-
waga między siłą ku środkowi działa-
jącą i siłami działającemi na zewnątrz.
Na zewnątrz działa siła odśrodkowa $\frac{mv^2}{R}$
i elektromagnetyczna evH, przyczem
elektron porusza się z prędkością v.
$\frac{mv^2}{R}+evH=\alpha R$ – w drugim wypadku ma-

my równanie odpowiednie, tylko że evH ma znak przeciwny. Prędkość v jest w związku z ilością obrotów i promieniem: $v = 2\pi R n$
Jeżeli to podstawimy, otrzymamy

$$4\pi^2 m n^2 R + 2\pi e n R H = \alpha R.$$

Stałą α wyznaczymy z warunku $n = n_0$, gdy $H = 0$.

$$4\pi^2 m n_0^2 = \alpha, \quad \text{wobec tego} \; (n_0^2 - n^2) = \frac{2\pi e n H}{4\pi^2 m} =$$

$$= \frac{eHn}{2\pi m} \qquad (n_0 - n)(n_0 + n) = \frac{eHn}{2\pi m}.$$

$n_0 - n$ = różnica liczby drgań $= \Delta n$. Ponieważ n_0 prawie równa się n, to $n_0 + n = 2n$ stąd $\Delta n = -\frac{eH}{4\pi m}$; jest to wzór wyrażający zależność różnicy częstości drgań w stanie naturalnym i w polu magnetycznem; zależy ona od wielkości „H" i stosunku $\frac{e}{m}$; widać, że w pierwszym wypadku (fig. 77 I) elektron będzie się powolniej poruszał, niż w stanie naturalnym, w drugim wypadku szybciej. To sobie można też wytłumaczyć

w sposób następujący: jeżeli elektron poru-
sza się w drugi sposób, to siła odśrodkowa ró-
noważy siłę przyciągającą ku środkowi.
Jeżeli siłę przyciągającą powiększymy wsku-
tek dodania siły magnetycznej, to należy
wytworzyć większą siłę odśrodkową, czyli więk-
szą szybkość ruchu. Odpowiednio jest wzoru
$\Delta n = \frac{e}{m}\frac{H}{4\pi}$. Różnica okresu drgań obu rodza-
jów $\Delta = \frac{e}{m}\frac{H}{2\pi}$. Zamiast częstości drgania n
można łatwo wprowadzić długość fali $\lambda =$
$= \frac{c}{n}$, stąd mamy

$d\lambda = -\frac{c}{n^2}dn$, $\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{dn}{n}$. Zatem w tym
wypadku $\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{e}{m}\frac{H}{2\pi}\frac{\lambda}{c}$.

Jaki będzie skutek? Początkowo mieliśmy
tylko drgania jednego rodzaju z określoną
ilością obrotów „n_0", wychodziło światło mo-
nochromatyczne. W polu magnetycznem
drgania się zmieniają, jedne się przyspie-
szają, inne opóźniają, długość ich fal się

znienia, linie widmowe, które się pokrywały rozdzielają się. Jedna ze składowych pochodzi

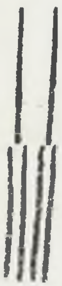


Fig. 78.

od tych, które w jednym kierunku wirowały, druga od drgań w przeciwnym kierunku wirujących. Jedne i drugie muszą być światłem kołowo spolaryzowanem. Co się tyczy wartości liczbowych, to Zeeman wykonał pierwsze obserwacye przy sile pola magnetycznego H = 8000 (cm). Obserwował rozszczepienie, które równało się 1/40 odstępu linii D. Później zrobił dokładniejsze badania przy użyciu silniejszych pól magnetycznych i otrzymał $\frac{e}{m} = 1{\cdot}6 . 10^7$. Jest to w zupełnej zgodzie z temi liczbami, które się otrzymało z obserwacyi promieni katodowych. Odnosi się to do specyalnego wypadku, że promień wychodzi w kierunku pola magnetycznego. Używa się silnego elektro,

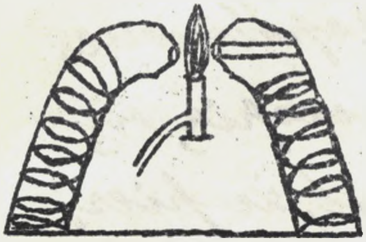
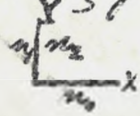


fig. 79.

magnesu. Między stożko-wemi nasadkami umieszcza się płomień Bunsena. Magnes w tem miejscu jest przedziurawiony; światło wychodzące ukazuje się we widmie rozszczepione i cyr-kularnie spolaryzowane. Inaczej zachowują się drgania, które wychodzą prostopadle do pola magnetycznego:



Na to światło składają się wszystkie drgania odbywające się w płaszczyźnie rysunku, czyli drgania w kierunku osi y i osi x. Te w kierun-ku osi x odbywają się równolegle do linii sił pola magnetycznego. Na nie pole magne-tyczne wcale nie działa, zachowują one prę-dkość normalną $= n_0$. Te w kierunku osi y są składowe drgań kołowych, o których poprze-dnio była mowa. Będą to więc 2 rodzaje „n_1" i „n_2". W takim wypadku mamy 3 rodzaje drgań:

1) normalne, 2) przyspieszone, 3) opóźnione. Pojedyncze linie widmowe rozszczepią się w 3 linie. Przytem trzeba zważyć, że pierwotne pochodzące od tych w kierunku osi x będą liniowo spolaryzowane, a przyspieszone i opóźnione będą liniowo, ale prostopadle do tamtych spolaryzowane. To wszystko zgadza się najzupełniej z doświadczeniem. Obserwacye tych zjawisk przy pomocy siatek defrakcyjnych są dość trudne; wygodniejsze są do tego spektroskopy schodkowe. Wiele badań na tem polu wykonał Michelson. Zjawiska są najczęściej o wiele więcej skomplikowane, a ich teorya nie jest jeszcze ściśle opracowaną. Lorentz tłumaczy to tak, że teorya stosuje się tylko do wypadku, gdy mamy tylko jeden elektron drgający, a zazwyczaj w atomach wysyłających światło

będzie większa ilość elektronów, które na siebie oddziaływują i modyfikują nawzajem swój ruch. Pokazuje się, że różne linie widmowe zachowują się w ten sposób, że zamiast 3 części występuje rozkład na 5, 6, 4, 9 itd. linij.—

Jest rzeczą ciekawą, że różne linie należące do tej samej seryi widmowej zachowują się w ten sam sposób także pod względem zjawiska Zeemanna. Wiadomo, że to, co widzimy w widmie jest superpozycyą szeregu seryi. Linie należące do

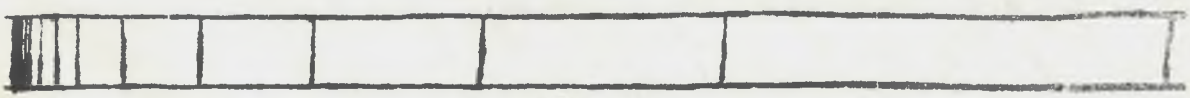


fig. 80

różnych seryi różnią się między sobą, jedne są bardziej zamglone, inne bardziej ostre itd. To jest w związku z rozkładem natężenia światła. W widmie powstają linie, gdy natężenie światła jest fun-

kcyą długości fali λ, funkcyą na pozór nie ciągłą; z tego, jak maxima przebiegają można wnioskować, które linie należą do jednej seryi.

2) Teorya dyspersyi na podstawie elektronowej. Mówiliśmy, że jedną z głównych wad teoryi elektromagnetycznej Maxwella jest to, że nie zdawała sprawy z zjawiska dyspersyi w ośrodkach przeźroczystych. Według Maxwella $n = \sqrt{k}$; nie zależy zatem od długości λ. Tymczasem pokazuje się, że we wszystkich ośrodkach przeźroczystych $n = f_e(\lambda)$. Teorya dyspersyi pochodzi w początkach od Cauchy'ego; rozwinęli ją następnie Biot - Boussinesq, Helmholtz, wszyscy na podstawie teoryi mechanicznej undulacyjnej.

Z punktu widzenia teoryi elektronowej dyspersya przedstawia się tak: Mamy równa-

nie Maxwella

$$K\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \xi}+4\pi\lambda\mathfrak{E}=\operatorname{rot}\mathfrak{H}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi}=-\operatorname{rot}\mathfrak{E};$$

Drugie równanie zachowuje się także w teorji elektronowej, ale pierwsze trzeba zmienić. Jest to równanie elektromagnetyzmu $4\pi i+4\pi\lambda\mathfrak{E}=\operatorname{rot}\mathfrak{H}$. Jeżeli mamy pole elektrostatyczne, drugi składnik znika. Wynika stąd $i=\frac{\alpha k}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \xi}$. Drude mówi, że gdy światło wpada elektrony zostają wprowadzone w ruch drgający i że to, co nazywamy prądem, składa się z prądu polaryzacyi w eterze i z przesunięcia elektronów,

$$u=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial x}+n_1 e\frac{\partial \xi_1}{\partial t}+n_2 e\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi}+\dots .$$

(ξ odstęp w normalnej pozycyi równowagi, $\frac{d\xi}{d\xi}$ prędkość w kierunku x; jeżeli elektron ma ładunek e, to prąd w kierunku osi x jest równoważny $e\frac{d\xi}{d\xi}$, a tych elektronów jest n; mogą wreszcie być różne rodzaje).

Poniewaź elektrony odbywają ruch drgający, podlegają siłom sprężystym, które starają się sprowadzić je do pozycyi równowagi, oraz siłom elektrycznym, które je pobudzają. Będzie tu ważne prawo Newtona $m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\alpha\xi+eX$. Należy uwzględnić jeszcze tarcie, które jest konieczne, by elektrony nie drgały wiecznie, ale rodzaju tego tarcia bliżej nie znamy. Drude stawia je równe $-\beta\frac{\partial\xi}{\partial t}$, tak, że

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\alpha\xi+eX-\beta\frac{\partial\xi}{\partial t}.$$

Stała α jest w związku z wychyleniem elektronu z pozycyi normalnej przez stałą siłę X, mianowicie w razie spoczynku byłoby $\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0$: $\xi=\frac{e}{\alpha}X$.

Jeżeli więc wpada fala elektromagnetyczna, to siła X jest funkcyą periodyczną czasu o periodzie τ, wtedy otrzymamy rozwiązanie przyjmując $\xi=Ae^{\frac{it}{\tau}}$, a zatem

$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{i}{\tau}\xi$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\tau^2}\xi$

Równanie owo zatem przyjmie postać:

$$\left(-\frac{m}{\tau^2} + \alpha + \beta\frac{i}{\tau}\right)\xi = eX \text{, więc}$$

$$\xi = \frac{eX}{\alpha + \frac{\beta i}{\tau} - \frac{m}{\tau^2}}$$

a różniczkując i wstawiając to do wyrażenia na μ,

$$\mu = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{1 + \frac{4\pi e_1^2 n_1}{\alpha_1 + \frac{\beta_1 i}{\tau} - \frac{m}{\tau^2}} + \frac{4\pi e_2^2 n_2}{\alpha_2 + \frac{\beta_2 i}{\tau} - \frac{m}{\tau^2}}\right\}$$

To jest zatem owo wyrażenie, które obecnie przychodzi na miejsce prądu $\mu = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$, to znaczy, że obecnie można użyć wszystkich dawniejszych wzorów dla przenoszenia się fal elektromagnetycznych, jeżeli zamiast stałej K w nich podstawimy ową wielkość w nawiasach:

$$\left\{1 + \frac{4\pi e_1^2 n_1}{\alpha_1 + \frac{\beta_1 i}{\tau} - \frac{m}{\tau^2}} + \frac{4\pi e_2^2 n_2}{\alpha_2 + \frac{\beta_2 i}{\tau} - \frac{m}{\tau^2}}\right\},$$

a wiemy, że to odpowiadać powinno kwadratowi współczynnika załamania, więc mamy

Nowe teorye el. i magn. Ark. XXXI.

ogólnie $$n^2 = 1 + \frac{4\pi e_1^2 n_1}{\alpha_1 + \frac{\beta_1 i}{\tau} - \frac{m}{\tau^2}} + \frac{4\pi e_2^2 n_2}{\alpha_2 + \frac{\beta_2 i}{\tau} - \frac{m}{\tau^2}},$$

więc n złożone z części rzeczywistej i urojonej (z powodu i w mianowniku), co oznacza w ogólności istnienie zjawiska absorbcyi) i wtedy mamy:

$$n^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta_k n_k}{1 - \left(\frac{\tau_k}{\tau}\right)^2},$$

jeżeli dla skrócenia nazywamy $\vartheta_k = \frac{4\pi e_k^2}{\alpha_k}$ i $\tau_k^2 = \frac{m}{\alpha_k}$.

τ_k jest oczywiście okresem „własnych swobodnych" drgań elektronów, tj. takich, które się odbywają wyłącznie pod działaniem siły sprężystej $m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\alpha\xi$.

Chodzi obecnie o to, czy owe „własne drgania swobodne" są częstsze, czy powolniejsze od drgań światła widzialnego (więc, czy odpowiadają drganiom w pozafiołkowej lub pozaczerwonej części widma).

W pierwszym wypadku mamy $\tau_k < \tau$, więc:

$$\frac{1}{1-\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}=1+\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2+\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^4+\cdots$$

W drugim wypadku: $\tau_h > \tau$, więc

$$\frac{1}{1-\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}=-\left(\frac{\tau}{\tau_h}\right)^2\left[1+\left(\frac{\tau}{\tau_h}\right)^2+\left(\frac{\tau}{\tau_h}\right)^4+\cdots\right]$$

W pierwszym wypadku otrzymujemy wzór dla dyspersyi (zależności spółczynnika załamania od długości fali światła wpadającego) formy:

$$n^2=\underbrace{1+\sum n_h\vartheta_h}_{A}+B\lambda^2+C\lambda^4 \quad \left(\text{ponieważ } \tau=\frac{\lambda}{c}\right)$$

Zwykle jednak taki wzór nie jest dosyć dokładny i poznano empirycznie, że wtedy dokładniejszy jest wzór formy:

$$n^2=-\frac{A'}{\lambda^2}+A+B\lambda^2+C\lambda^4$$

(jako przybliżenie, przy pominięciu wyrażeń $\frac{1}{\lambda^4}$ i wyższych), co istotnie wynika z powyższej teoryi, jeżeli przyjmujemy istnienie różnych rodzajów elektronów, takich, które mają drga-

nia własne w pozafiołkowem i takich, które mają je w pozaczerwonem.

Takiem ciałem jest np. woda; istotnie woda posiada wybitne smugi absorpcyjne w poza-czerwonem widmie (dla $\lambda = 0{\cdot}08$ mm), zatem też drgania swobodne elektronów odpowiednie.

Równocześnie widzimy, że ogólnie dla drgań elektromagnetycznych bardzo powolnych np. drgań Hertzowskich, gdzie w każdym razie $\tau \gg \tau_h$, będzie:

$$n^2 = 1 + \sum_h \vartheta_h\, n_h,$$

to jest wtedy owa wielkość, którą nazywamy stałą dielektryczną K, więc tłumaczy się tak zupełnie, czemu związek $n^2 = K$ nie spełnia się dla drgań świetlnych, i jak mogą być nawet tak wielkie liczby, jak $K = 80$ (dla wody).

Również także zjawisko dyspersyi anormalnej i optyki metali mogą być wytłumaczone na tej podstawie — w co już na tem miej-

scu nie wchodzimy. (Patrz Drude: Optyka).

3). Najsilniejszą podporę dla teoryi elektronowej stanowią zjawiska rozbrojenia elektryczności w gazach rozrzedzonych, dawniej zupełnie zagadkowe, a obecnie przez tę teoryę szczegółowo wytłumaczone - ale bliższe omówienie ich wymaga znajomości teoryi kinetycznej gazów, więc pozostawimy sobie to do omówienia w związku z teoryą kinetyczną.—

INSTYTUT FIZYKI UJ
BIBLIOTEKA
KRAKÓW

Koniec.